# Déterminants

Dans ce chapitre, le corps des scalaires noté $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E désigne un $\mathbb{K}$_espace vectoriel de dimension finie.



--------------

## 1. Déterminant d'une matrice carrée

**Théorème assurant l'existence et l'unicité de l'application déterminant**

Il existe une unique application de $M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ appelée déterminant et notée det telle que :

1) l'application déterminant est <u>linéaire par rapport à chaque colonne</u> :

Soit $A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$ , $\lambda \in \mathbb{K}$ , $A_\lambda = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & \lambda a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & \lambda a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

alors, par homogénéité par rapport à la $j$ _ème colonne, $\boxed{det(A_\lambda)=\lambda\, det(A)}$

Soit $B=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & b_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & b_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j}+b_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{1,j}+b_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$

alors, par additivité par rapport à la $j$ _ème colonne, $\boxed{det(C)=det(A)+det(B)}$

2) <u>l'échange de deux colonnes</u> a pour effet de multiplier le déterminant par $-1$ :

Soit $D=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,k} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

et $D'=\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,k} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,k-1} & a_{1,j} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,k} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,k-1} & a_{n,j} & a_{n,k+1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ alors $\boxed{det(D')=-det(D)}$

3) Le déterminant de la <u>matrice unité</u> $I_n$ vaut 1 : $\boxed{det(I_n)=1}$

⚠ En général, $det(\lambda A) \neq \lambda det(A)$ et $det(A+B) \neq det(A)+det(B)$

Démonstration : théorème admis pour $n \geqslant 4$ . Les cas $n=2$ et $n=3$ sont envisagés ci-après.

Remarque : Pour $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ on note aussi $det(A)=\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

**Déterminant d'une matrice carrée de dimension 2**

Soit $A=\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix} \in M_2(K)$ alors $det(A)=xy'-yx'$

Démonstration : par linéarité par rapport à la 1ère colonne : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 0 & x' \\ 1 & y' \end{vmatrix}$ , car $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

puis par linéarité par rapport à la 2ème colonne : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\left(x'\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) + y\left(x'\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right)$

Or par échange de colonnes on a : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ donc $2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ donc $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}=0$ . De même $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ .

Par ailleurs $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$ donc : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy'-x'y$ . □

Remarque : par une démarche analogue on obtient : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z''+x'y''z+x''yz'-zy'x''-z'y''x-z''yx'$

Cette expression permet d'assurer l'existence et l'unicité de l'application déterminant en dimension 3 mais n'est pas à retenir.

Exemple de code python calculant le déterminant d'une matrice carrée en utilisant la bibliothèque numpy :

```python
import numpy as np

A=np.array([[1,2,3],
            [4,5,6],
            [7,8,9]])

print(np.linalg.det(A))
```

## 2. Propriétés du déterminant

**Cas de deux colonnes égales**

Le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul.

Démonstration : soit $A \in M_n(K)$ et pour $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ tels que $i \neq j$ , on note A' la matrice obtenue à partir de A en échangeant les colonnes $i$ et $j$ , on a alors $det(A')=-det(A)$ .

Si les colonnes $i$ et $j$ de A sont égales alors $A=A'$ donc $det(A')=det(A)$ .

Ainsi ... □

**Propriété d'homogénéité de degré $n$**

Soit $A \in M_n(K)$ et $\lambda \in K$ alors $det(\lambda A)=\lambda^n det(A)$

Démonstration : si $A=(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ alors $\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ donc la matrice $\lambda A$ est obtenue en multipliant chaque colonne de A par $\lambda$ , la formule est donc obtenue par homogénéité par rapport aux $n$ colonnes de la matrice $\lambda A$ . □

**Invariance du déterminant par certaines opérations sur les colonnes**

Le déterminant est invariant par sommation sur une colonne d'une combinaison linéaire des <u>autres</u> colonnes.

i.e. $$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j}+\sum\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} \alpha_k a_{1,k} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j}+\sum\limits_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}} \alpha_k a_{n,k} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Démonstration : par linéarité par rapport à la $j$ ème colonne et nullité du déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales.

⚠ Sont ici concernées seulement les opérations sur les colonnes du type :

$$\boxed{C_j \leftarrow \underbrace{\alpha_1 C_1 + \ldots + \alpha_{j-1} C_{j-1}}_{\text{combinaison linéaire}} + C_j + \underbrace{\alpha_{j+1} C_{j+1} + \ldots + \alpha_n C_n}_{\text{combinaison linéaire}}}$$

## Déterminant d'une matrice triangulaire

Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux.

i.e. pour une matrice triangulaire supérieure : $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$

pour une matrice triangulaire inférieure : $\begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$

Démonstration : pour une matrice triangulaire supérieure :

Si $a_{1,1}=0$ alors la 1ère colonne de la matrice est nulle donc, par linéarité : $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$

Si $a_{1,1} \neq 0$ alors par opérations $C_j \leftarrow C_j - \dfrac{a_{1,j}}{a_{1,1}} C_1 \quad \forall\, j \in [\![2;n]\!]$, on a : $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix}$

En réitérant ce procédé, par rapport aux colonnes successives, on obtient :

► s'il existe $j \in [\![1;n]\!]$ tel que $a_{j,j}=0$ alors $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = 0$

► si pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, $a_{j,j} \neq 0$ alors $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_{k,k}\right) det(I_n) = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$

Pour une matrice triangulaire inférieure, le procédé est identique en utilisant les colonnes dans l'ordre inverse. □

Exemple de code python permettant le calcul du déterminant d'une matrice carrée :

```python
def determinant(M):
    d=1
    T=list(M)
    for j in range(len(M)):
        L=[abs(T[j][k]) for k in range(j,len(M))]
        if max(L)>10**-14 :
            p=L.index(max(L))+j
            if p!=j :
                d=-d
                for i in range(len(M)):
                    (T[i][j],T[i][p])=(T[i][p],T[i][j])
            for k in range(j+1,len(M)):
                c=T[j][k]/T[j][j]
                for i in range(len(M)):
                    T[i][k]=T[i][k]-c*T[i][j]
    for j in range(len(M)):
        d=d*T[j][j]
    return(d)

A=[[1,2,3],
   [4,5,6],
   [7,8,9]]

print(determinant(A))
```

### Caractérisation des matrices inversibles

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.

Soit $A\in M_n(K)$ , $\boxed{A\in GL_n(K)\Leftrightarrow det(A)\neq 0}$.

Démonstration : par opérations successives sur les colonnes du type $C_j\leftarrow C_j+\sum_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq j}}\alpha_k C_k$ , la matrice A est équivalente en colonnes à une matrice triangulaire supérieure T et $det(A)=det(T)$

De plus, ces opérations successives sur les colonnes sont obtenues par multiplications matricielles successives à droite par des matrices du type :

$$\begin{array}{c} \\ D= \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & & j\text{-ème colonne} & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & \alpha_{j-1} & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \alpha_{j+1} & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & \alpha_n & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{array}$$

$$\text{Or } D\in GL_n(K) \text{ car } D^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 & 0 & \ldots & \ldots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 1 & -\alpha_{j-1} & \vdots & & & \vdots\\ \vdots & & & 0 & 1 & 0 & & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & -\alpha_{j+1} & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & -\alpha_n & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi les multiplications matricielles successives à droites conservent le rang de la matrice A donc rg(A)=rg(T).

$A\in GL_n(K) \;\Leftrightarrow\; rg(A)=n \;\Leftrightarrow\; rg(T)=n \;\Leftrightarrow$ T admet $n$ pivots $\Leftrightarrow\; det(T)\neq 0 \;\Leftrightarrow\; det(A)\neq 0$ □

### Rappel des caractérisations des matrices inversibles du programme de 1ère année

Soit $A\in M_n(K)$ :

A est inversible $\Leftrightarrow$ pour $Y\in M_{n,1}(K)$, l'équation $AX=Y$ admet une unique solution $X\in M_{n,1}(K)$

$\Leftrightarrow$ l'équation homogène $AX=0_{M_{n,1}(K)}$ admet pour unique solution $X=0_{M_{n,1}(K)}$

$\Leftrightarrow$ la matrice échelonnée réduite en ligne équivalente à A admet $n$ pivots

$\Leftrightarrow$ $rg(A)=n$

$\Leftrightarrow$ $Ker(A)=\{0_{K^n}\}$

$\Leftrightarrow$ les vecteurs colonnes de A sont libres dans $K^n$

$\Leftrightarrow$ les vecteurs lignes de A sont libres dans $K^n$

$\Leftrightarrow$ il existe $B\in M_n(K)$ telle que $AB=I_n$

$\Leftrightarrow$ il existe $B\in M_n(K)$ telle que $BA=I_n$

### Corollaire : propriété caractéristique des bases de $K^n$

Soit $(v_1;\ldots;v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de $K^n$. En notant $\forall j\in[\![1;n]\!]$, $v_j=\begin{pmatrix}a_{1,j}\\ \vdots\\ a_{n,j}\end{pmatrix}$,

$$(v_1;\ldots;v_n) \text{ est une base de } K^n \text{ si et seulement si } \begin{vmatrix}a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}\end{vmatrix}\neq 0$$

i.e. $det(A)=0$ si et seulement si les vecteurs colonnes de A sont liés dans $K^n$.

Démonstration : $(v_1;\ldots;v_n)$ est une base $K^n \;\Leftrightarrow\; rg(v_1;\ldots;v_n)=n \;\Leftrightarrow\; det(A)\neq 0$ . □

Exemple : $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$ donc ...

**Déterminant d'un produit de matrice carrées**

Soient $A \in M_n(K)$ et $B \in M_n(K)$ alors $\boxed{det(AB) = det(A) \times det(B)}$

Démonstration : hors programme.

**Déterminant de l'inverse d'une matrice**

Soit $A \in GL_n(K)$ alors $\boxed{det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}}$

Démonstration : $det(AA^{-1}) = \ldots$
Or $det(AA^{-1}) = \ldots$ □

**Corollaire sur le déterminant de matrices semblables**

Deux matrices carrées semblables ont même déterminant.

Démonstration : Soient A et A' deux matrices carrées semblables …

**Déterminant de la transposée d'une matrice**

Soit $A \in M_n(K)$ alors $\boxed{det(A^T) = det(A)}$

Démonstration : hors programme.

**Propriétés du déterminant par rapport aux lignes**

Le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis de lignes que des colonnes :

1) l'application déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne de la matrice
2) l'échange de deux lignes a pour effet de multiplier le déterminant par $-1$
3) le déterminant d'une matrice ayant deux lignes égales est nul
4) les opérations sur les lignes du type $L_i \leftarrow L_i + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ k \neq i}} \alpha_k L_k$ ne change pas la valeur du déterminant
5) le déterminant d'une matrice est nul si et seulement si ses vecteurs lignes sont liés.

Calcul du déterminant par développement suivant une ligne ou une colonne :

Dans chaque cas, les lignes et colonnes grisées sont enlevées de la matrice, ainsi le calcul du déterminant d'une carrée matrice de $M_n(K)$ est obtenu en sommant $n$ déterminants de matrices carrées de $M_{n-1}(K)$. Ces formules sont admises.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

correspond à

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Développement suivant la *j*-ème colonne :

*j*-ème colonne

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{1+j} a_{1,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+j} a_{i,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+j} a_{n,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Développement suivant la *i*-ème ligne :

$$\begin{array}{c} \\ \\ i\text{-ème ligne} \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = (-1)^{i+1} a_{i,1} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+j} a_{i,j} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+j} a_{i,n} \times \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Exemple de code Python permettant le calcul du déterminant d'une matrice par développement selon la 1ère ligne (fonction récursive) :

```python
def determinant(M):
    if len(M)==1 :
        return(M[0][0])
    else :
        return(sum(((-1)**j)*M[0][j]*determinant([[M[i][k] for k in range(len(M)) if k!=j]for i in range(1,len(M))]) for j in range(len(M))))

A=[[1,2,3],
   [4,5,6],
   [7,8,9]]

print(determinant(A))
```

Remarque : l'alternance du signe de $(-1)^{i+j}$ peut être schématisée par : $\begin{pmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$

Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille $n$, la fonction déterminant est appelée $n!$ fois.

## 3) Déterminant d'une famille de vecteurs, déterminant d'un endomorphisme.

**Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n$, B une base de E, et $(v_1;\dots;v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de E. Le déterminant de la famille $(v_1;\dots;v_n)$ est le scalaire noté $det_{\text{B}}(v_1;\dots;v_n)$ égal au déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $v_i$ dans la base B.

i.e. en notant $\forall j\in[\![1;n]\!]$, $Mat_{\text{B}}(v_j)=\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$, $det_{\text{B}}(v_1;\dots;v_n)\stackrel{\text{def}}{=}\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

**Propriété caractéristique des bases**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n$, B une base de E, et $(v_1;\dots;v_n)$ une famille de $n$ vecteurs de E.

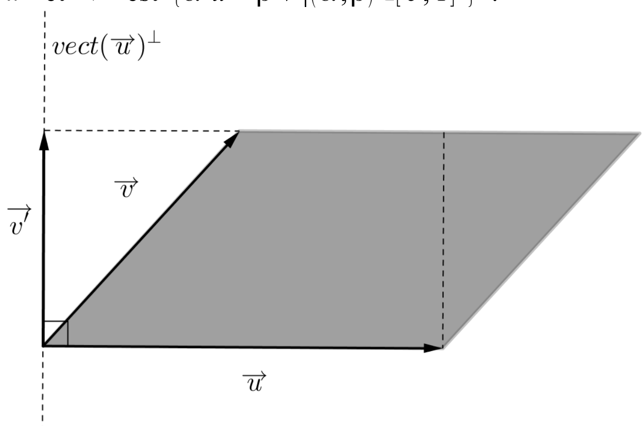
La famille $(v_1;\dots;v_n)$ est une base de E si et seulement si $det_{\text{B}}(v_1;\dots;v_n)\neq 0$

Démonstration :

$(v_1;\dots;v_n)$ est une base de E $\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$ est la matrice de passage de la base B vers la base $(v_1;\dots;v_n)$ □

**Interprétation géométrique en dimension 2 du déterminant dans une base orthonormale directe**

Soient E est un espace vectoriel de dimension 2, B une base orthonormale directe de E, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E.
Le parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\{\alpha\vec{u}+\beta\vec{v} \mid (\alpha;\beta)\in[0;1]^2\}$ :




Soit $\text{A}(\vec{u};\vec{v})$ l'aire algébrique du parallélogramme sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :

Si $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$ alors $\text{A}(\vec{u},\vec{v})=0$.

alors $\boxed{\text{A}(\vec{u};\vec{v})=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\sin(\vec{u};\vec{v})}$

Calcul de l'aire algébrique à l'aide du déterminant : $\boxed{\text{A}(\vec{u};\vec{v})=det_{\text{B}}(\vec{u};\vec{v})}$

i.e. en notant $Mat_{\text{B}}(\vec{u})=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $Mat_{\text{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on a : $\text{A}(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

Démonstration : Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$, on utilise les coordonnées polaires car $\text{B}=(\vec{i};\vec{j})$ est orthonormale directe.

$Mat_{\text{B}}(\vec{u})=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors pour $\theta=(\vec{i};\vec{u})$, on a $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\sqrt{x^2+y^2}\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}=\|\vec{u}\|\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$

de même $Mat_{\text{B}}(\vec{v})=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $(\vec{i};\vec{v})=(\vec{i};\vec{u})+(\vec{u};\vec{v})=\theta+(\vec{u};\vec{v})$, $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\|\vec{v}\|\begin{pmatrix} \cos(\theta+(\vec{u};\vec{v})) \\ \sin(\theta+(\vec{u};\vec{v})) \end{pmatrix}$

Ainsi par linéarité par rapport aux colonnes : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\begin{vmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta+(\vec{u};\vec{v})) \\ \sin(\theta) & \sin(\theta+(\vec{u};\vec{v})) \end{vmatrix}$

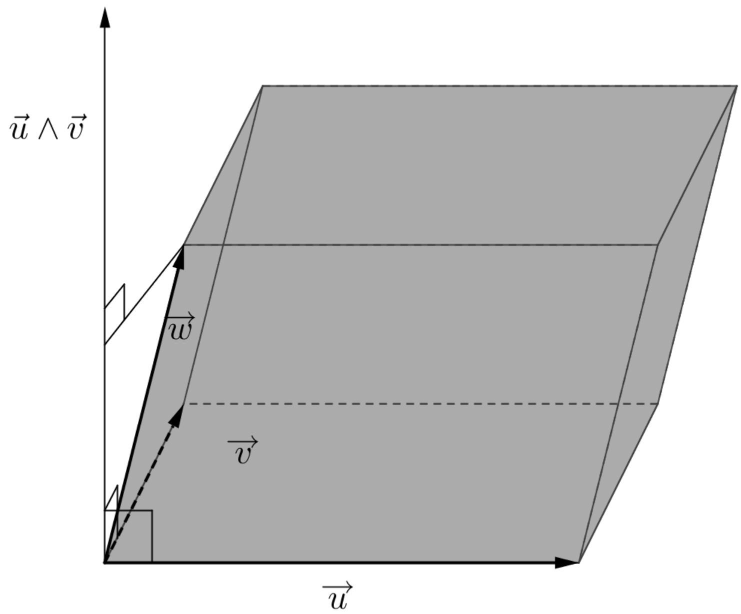
Donc $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times (\cos(\theta) \times \sin(\theta + (\vec{u};\vec{v})) - \sin(\theta) \times \cos(\theta + (\vec{u};\vec{v}))) = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin((\vec{u};\vec{v}))$

car $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$ utilisé ici avec $a = \theta + (\vec{u};\vec{v})$ et $b = \theta$ □

**Interprétation géométrique en dimension 3 du déterminant dans une base orthonormale directe**

Soient E est un espace vectoriel de dimension 3, B une base orthonormale directe de E, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de E.

Le parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est $\{\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} \mid (\alpha;\beta;\gamma) \in [0;1]^3\}$ :




Soit $V(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ :

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $V(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = 0$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors $\boxed{V(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}}$

Calcul du volume algébrique à l'aide du déterminant : $V(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = det_B(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$

i.e. en notant $Mat_B(\vec{u}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $Mat_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $Mat_B(\vec{w}) = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$ on a : $\boxed{V(\vec{u};\vec{v};\vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}}$

Démonstration : B étant une base orthonormale directe $Mat_B(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}$ donc... □

**Détermination d'une équation d'un hyperplan dans une base**

Soient E un espace vectoriel de dimension $n$ muni d'une base B, $(v_1;\ldots;v_{n-1})$ une famille libre de $n-1$ vecteurs de E et $v$ un vecteur de E.

$$v \in Vect(v_1;\ldots;v_{n-1}) \Leftrightarrow det_B(v_1;\ldots;v_{n-1};v) = 0$$

$$\text{i.e. } Vect(v_1;\ldots;v_{n-1}) = \{v \in E \mid det_B(v_1;\ldots;v_{n-1};v) = 0\}$$

En notant $\forall j \in [\![1;n-1]\!]$, $Mat_B(v_j) = \begin{pmatrix} a_{1;j} \\ \vdots \\ a_{n;j} \end{pmatrix}$ on a :

$$v \in Vect(v_1;\ldots;v_{n-1}) \Leftrightarrow Mat_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ tel que } \begin{vmatrix} a_{1;1} & \ldots & a_{1;n-1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n;1} & \ldots & a_{n;n-1} & x_n \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{i.e. } Vect(v_1;\ldots;v_{n-1}) = \left\{ v \in E \mid Mat_B(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} a_{1;1} & \ldots & a_{1;n-1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n;1} & \ldots & a_{n;n-1} & x_n \end{vmatrix} = 0 \right\}$$

Remarque : par développement selon la dernière colonne, on obtient bien une équation linéaire homogène pour les inconnues $x_1$ à $x_n$ .

**Déterminant de la famille des images des vecteurs d'une base dans cette même base**

Soient E un K_espace vectoriel de dimension $n$ , $\mathrm{B}=(u_1;\dots;u_n)$ et $\mathrm{B}'=(u'_1;\dots,u'_n)$ deux bases de E et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ .

$$Det_{\mathrm{B}}(f(u_1);\dots;f(u_n))=Det_{\mathrm{B}'}(f(u'_1);\dots;f(u'_n))$$

i.e. le résultat ne dépend pas de la base choisie mais seulement de l'endomorphisme $f$

Démonstration : $Det_{\mathrm{B}}(f(u_1);\dots;f(u_n))=Det(Mat_{\mathrm{B}}(f))$

$Det_{\mathrm{B}'}(f(u'_1);\dots;f(u'_n))=Det(Mat_{\mathrm{B}'}(f))$

Or $Mat_{\mathrm{B}}(f)$ et $Mat_{\mathrm{B}'}(f)$ sont deux matrices semblables, elles ont donc même déterminant. □

**Définition du déterminant d'un endomorphisme**

Soit E un K_espace vectoriel de dimension $n$ , $\mathrm{B}=(u_1;\dots;u_n)$ une base de E et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ . Le déterminant de l'endomorphisme $f$ est le scalaire noté $\boxed{det(f)\overset{\text{def}}{=}det_{\mathrm{B}}(f(u_1);\dots;f(u_n))}$

i.e. $\boxed{det(f)=det(Mat_{\mathrm{B}}(f))}$

Remarque : le théorème d'indépendance par rapport à la base assure que $det(f)$ ne dépend pas du choix de B.

**Caractérisation des automorphismes**

Soient E un K_espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ .

$$\boxed{f\in\mathrm{GL}(\mathrm{E})\Leftrightarrow det(f)\neq 0}$$

Si $f\in\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ alors $\boxed{det(f^{-1})=\dfrac{1}{det(f)}}$

Démonstration : soit B une base de E : $f\in\mathrm{GL}(\mathrm{E}) \Leftrightarrow Mat_{\mathrm{B}}(f)\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) \Leftrightarrow det(Mat_{\mathrm{B}}(f))\neq 0$

Si $f\in\mathrm{GL}(\mathrm{E})$ alors $Mat_{\mathrm{B}}(f)\in\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et $Mat_{\mathrm{B}}(f^{-1})=(Mat_{\mathrm{B}}(f))^{-1}$ donc $det(f^{-1})=det((Mat_{\mathrm{B}}(f))^{-1})=\dfrac{1}{det(Mat_{\mathrm{B}}(f))}$ □

**Déterminant de l'application composée de deux endomorphismes**

Soit E un K_espace vectoriel de dimension finie, $f\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ et $g\in\mathrm{L}(\mathrm{E})$ , alors $\boxed{det(f\circ g)=det(f)\times det(g)}$

Démonstration : soit B une base de E : $Mat_{\mathrm{B}}(f\circ g)=Mat_{\mathrm{B}}(f)\times Mat_{\mathrm{B}}(g)$

Donc $det(f\circ g)=\dots$

□

Remarque : l'application det est un morphisme de groupe de $(\mathrm{GL}(\mathrm{E});\circ)$ dans $(\mathrm{K};\times)$ .