

Quelques techniques de calcul d'intégrales

Ici aucune précaution n'est prise sur l'existence des fonctions ou de leur intégrale ! On note P et Q des polynômes, et R une fraction rationnelle. \triangle Cette liste n'est pas exhaustive.

Forme de l'expression	Technique	Calcul
$\int_a^b f'(t) dt$	Primitives usuelles	$[f'(t)]_a^b = f(b) - f(a)$ Ex : $\cos^n t$ ou $\sin^n t \rightarrow$ linéariser ; penser à $e^a \cos(b) = \text{Re}(e^{a+ib})$, $e^a \sin(b) = \text{Im}(e^{a+ib})$ $\ln(\ln(x))' = \frac{1}{x \ln(x)}$, $(\ln(x)^\alpha)' = \alpha \frac{(\ln(x))^{\alpha-1}}{x}$, $\ln(\cos(x))' = -\tan(x)$, $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, ...
$\int_a^b g'(t) \times f(t) dt$	Intégration par parties (IPP)	$[g(t) \times f(t)]_a^b - \int_a^b g(t) \times f'(t) dt$ Ex : pour $P(t) \times \ln(t)$ et $P(t) \times \arctan(t)$, dériver \ln et \arctan pour $P(t)e^{\alpha t}$, $P(t)\cos(\alpha t)$ ou $P(t)\sin(\alpha t)$, penser aux IPP successives, ou aux récurrences...
$\int_a^b g'(t) \times f'(g(t)) dt$	Dérivée d'une fonction composée	$[f(g(t))]_a^b = f(g(b)) - f(g(a))$ Ex : $(u^2)' = 2u' \times u$, $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$ si $u(t) \neq 0$, ...
$\int_a^b f(t) dt$	Changement de variable	en posant $t = g(u)$ on a $dt = g'(u) du$ et $u = g^{-1}(t)$ donc : $\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) \times g'(u) du$
$\int_a^b \frac{P(t)}{Q(t)} dt$	Décomposition en éléments simples : $\frac{P}{Q}$ est combinaison linéaire d'un polynôme et de fractions rationnelles du type, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\beta^2 - 4\gamma < 0$ 1) $\frac{1}{(t+\alpha)^n}$ ou 2) $\frac{2t+\beta}{(t^2+\beta t+\gamma)^n}$ 3) $\frac{1}{(t^2+\beta t+\gamma)^n}$	Les cas 1) et 2) sont des primitives usuelles : si $\forall t \in [a; b]$, $u(t) \neq 0$ alors : $\int_a^b \frac{u'(t)}{u(t)} dt = [\ln(u(t))]_a^b$ et si $n > 1$ alors $\int_a^b \frac{u'(t)}{(u(t))^n} dx = \left[-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{(u(t))^{n-1}} \right]_a^b$ Pour le cas 3), par changement de variable affine : $\int_a^b \frac{1}{(t^2+\beta t+\gamma)^n} dt = k \int_{a'}^{b'} \frac{1}{(1+u^2)^n} du$ Pour $n=1$, $\int_{a'}^{b'} \frac{1}{1+u^2} du = [\arctan(u)]_{a'}^{b'}$, si $n > 1$, par IPP successives en posant : $\frac{1}{(1+u^2)^n} = \frac{1+u^2-u^2}{(1+u^2)^n} = \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} - \frac{u}{2} \times \frac{2u}{(1+u^2)^n} = \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} - \frac{u}{2} \times \left(-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{(1+u^2)^{n-1}} \right)$
$\int_a^b \ln(P(t)) \times R'(t) dt$ et $\int_a^b \arctan(P(t)) \times R'(t) dt$ se ramènent au cas précédent par IPP en dérivant $\ln(P(t))$, $\arctan(P(t))$		
$\int_a^b R(\cos(t); \sin(t)) dt$	Changement de variable universel : $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ Dans certains cas : $u = \cos(t)$; $u = \sin(t)$; $u = \tan(t)$	$t = 2 \arctan(u)$ donc $dt = \frac{2 du}{1+u^2}$; $\cos(t) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$ et $\sin(t) = \frac{2u}{1+u^2}$
$\int_a^b R(e^t) dt$ ou $\int_a^b R(\text{ch}(t); \text{sh}(t)) dt$	Changement de variable universel $u = e^t$ Parfois utiles : $u = \text{th}\left(\frac{t}{2}\right)$; $u = \text{ch}(t)$; $u = \text{sh}(t)$	$t = \ln(u)$ donc $dt = \frac{du}{u}$; $\text{ch}(t) = \frac{u + \frac{1}{u}}{2} = \frac{u^2 + 1}{2u}$ et $\text{sh}(t) = \frac{u - \frac{1}{u}}{2} = \frac{u^2 - 1}{2u}$
$\int_a^b R(t; \sqrt{\alpha t^2 + \beta t + \gamma}) dt$	Mise sous forme canonique du radicande, puis changement de variable affine.	$\triangleright \sqrt{1+t^2}$ alors on pose $t = \text{sh}(u)$ ainsi $dt = \text{ch}(u) du = \sqrt{1+\text{sh}^2 u} du = \sqrt{1+t^2} du$ $\triangleright \sqrt{1-t^2}$ alors on pose $t = \sin(u)$ ainsi $dt = \cos(u) du = \pm \sqrt{1-\sin^2 u} du = \pm \sqrt{1-t^2} du$ $\triangleright \sqrt{t^2-1}$ alors on pose $t = \text{ch}(u)$ ainsi $dt = \text{sh}(u) du = \pm \sqrt{\text{ch}^2 u - 1} du = \pm \sqrt{t^2-1} du$
$\int_a^b R\left(t; \sqrt[n]{\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}}\right) dt$	Changement de variable $u = \sqrt[n]{\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}}$	$u^n = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta} \Leftrightarrow t(\gamma u^n - \alpha) = \beta - \delta u^n \Leftrightarrow t = \frac{\beta - \delta u^n}{\gamma u^n - \alpha}$ donc $dt = \frac{(\alpha \delta - \beta \gamma) n u^{n-1} du}{(\gamma u^n - \alpha)^2}$