Geoplan - Geospace
logiciel de construction mathématique

En 1997 le CREEM éditait la première version de GeoplanW logiciel de construction mathématique fonctionnant sous Windows, bientôt suivie de GeospacW[1], son équivalent dans l'espace puis d'une version 2 de GeoplanW. Ces logiciels sont au fil du temps devenus des standards pour l'enseignement secondaire.

Geoplan – Geospace réunit en un seul logiciel les versions actualisées des deux précédents et doit naturellement prendre leur place. Les versions précédentes peuvent être téléchargées sur le serveur de l'AID-CREEM dont l'adresse est http://www2.cnam.fr/creem/. Il a été développé en même temps que les versions ActiveX qui permettent d'insérer dans des pages HTML des figures (du plan ou de l'espace) ainsi que des écritures mathématiques. Parallèlement, une version multi-plateforme, sous Java, est en cours d'élaboration. Elle doit permettre au départ de voir et "faire fonctionner" les figures du plan ou de l'espace et dans l'avenir de les créer. Les versions ActiveX et Java sont mises à disposition sur le serveur de l'AID-CREEM.

Que ce soit dans le plan ou dans l'espace, de nouvelles fonctionnalités ont été ajoutées (comme les prototypes dans l'espace, les fonctions définies par valeurs, les fonctions de plusieurs variables, les représentations des surfaces par maillage) permettant de créer de nouveaux objets, d'illustrer de nouveaux problèmes ou d'améliorer la qualité de la représentation (palette de couleurs plus importante).

De plus la réunion des deux logiciels en un seul permet de faire communiquer entre elles des figures planes et des figures de l'espace (ce qui était impossible dans les versions précédentes, on ne pouvait que simuler une figure plane en se plaçant dans un plan de l'espace dans le logiciel GeospacW).

Enfin, cette nouvelle version bénéficie des modules de chargement et d'enregistrement (disponibles depuis la version 95 de Windows) qui facilitent

[1] une version DOS éditée au CRDP de Poitou-Charentes avait été distribuée dans tous les lycées en 1992 dans l'ensemble "Activités mathématiques avec IMAGICIELS, premières et terminales"

grandement la navigation en réseau ou sur le poste de travail et permet de donner des noms longs aux fichiers.

Les remarques, l'intérêt et le soutien des utilisateurs nous ont été souvent utiles et nous espérons qu'ils apprécieront les changements apportés au logiciel.

Cette introduction comporte trois parties : la première illustrant par quelques exemples la communication entre deux figures, l'une plane et l'autre de l'espace, les deux suivantes reprenant les présentations des plaquettes accompagnant GeoplanW et GeospacW (les exemples présentés et les divers commentaires techniques ou théoriques sont toujours pertinents).

I - Communication entre une figure plane et une figure de l'espace

Les fichiers qui ont servi pour les exemples présentés ici se trouvent dans le répertoire FiguresCommunicantes.

Exemple 1 : la "vitre" de Dürer

Un des problèmes que l'on doit aborder très vite lorsque l'on fait de la géométrie dans l'espace est celui de la représentation des objets de l'espace sur un plan. Pour faire mieux comprendre la représentation utilisée de façon classique en mathématique, on peut en présenter d'autres. Voici un exemple de perspective fuyante reprenant méthode illustrée dans des gravures célèbres de Dürer.

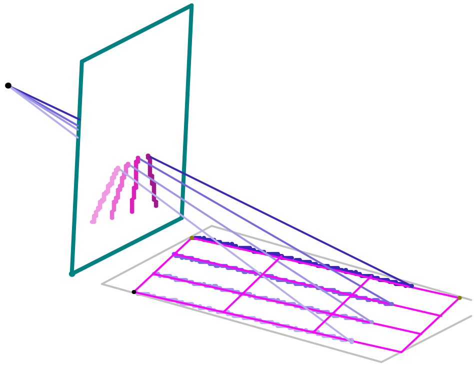
Il s'agit de représenter point par point sur une "vitre verticale" un quadrillage d'un plan horizontal. Deux figures sont mises en mosaïque ; l'une est dans l'espace et montre la construction point par point du dessin plan, l'autre est une figure plane et montre le résultat sur la "vitre".

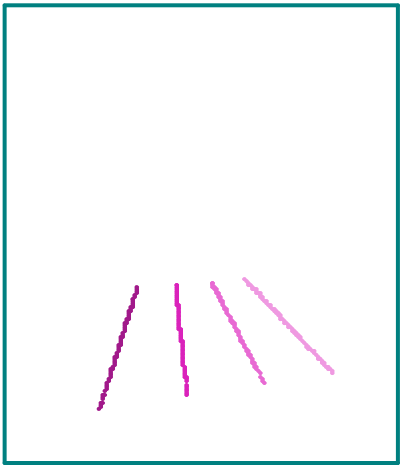
Dans la figure de l'espace, l'œil de l'observateur est représenté par le point O, pour chaque point M du quadrillage, sa représentation M' sur la "vitre" est le point d'intersection du "rayon lumineux" [OM] avec la "vitre".

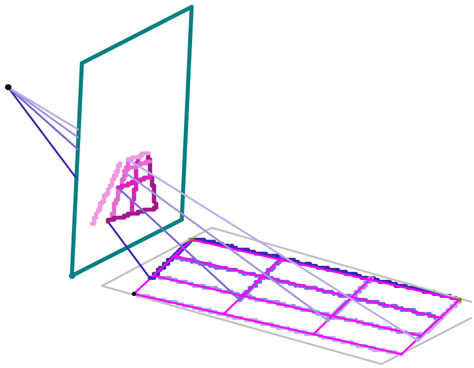
La figure plane **importe** les coordonnées du M' dans un repère du plan de la vitre.

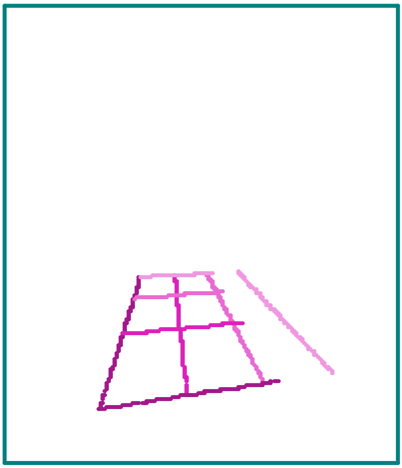
Pour mettre en évidence la notion de point de fuite, les images des parallèles du quadrillage sont construites en même temps. La figure plane représente ce que voit l'observateur sur la vitre, ce n'est pas ce qui est visible sur le côté de la vitre dans la figure de l'espace dans les dessins ci-dessous.

Voici deux étapes de la construction.









Exemple 2 : représentation "en vraie grandeur" d'une section plane d'un polyèdre convexe

Cette représentation peut être obtenue directement dans une figure de l'espace en mettant de face le plan de la section (la section étant construite grâce à un item de menu). Mais si on change les positions des points, le plan de la section ne reste pas forcément de face.

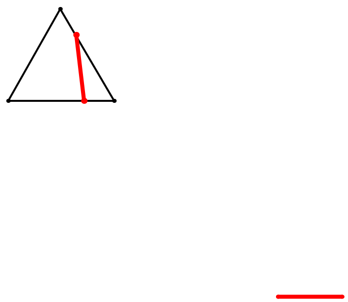
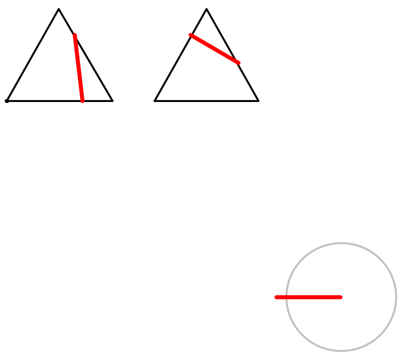
En général, dès que le polygone obtenu n'est pas un triangle, il est difficile ou pénible de déterminer "à la main" les divers éléments qui permettent de construire la section en vraie grandeur.

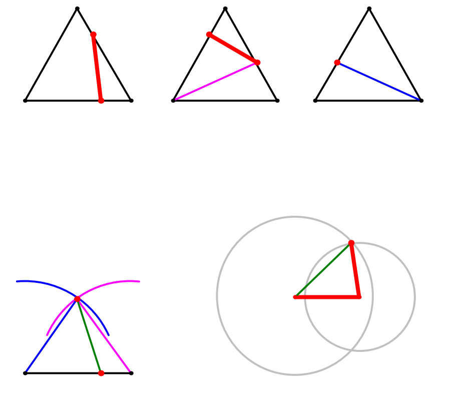
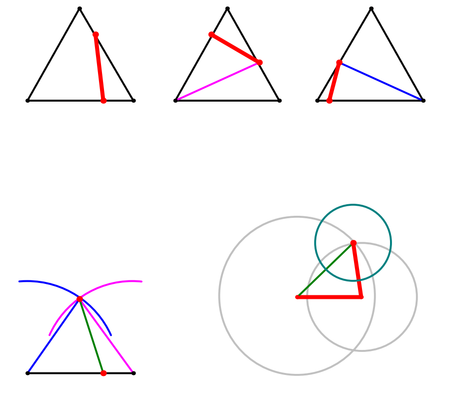
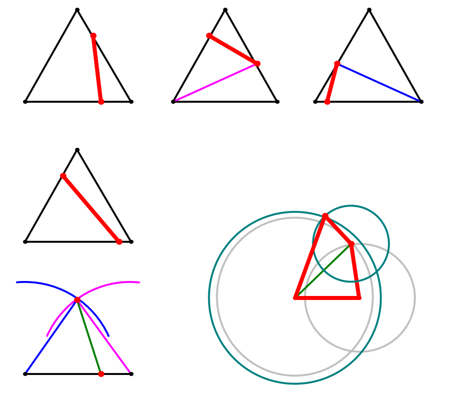
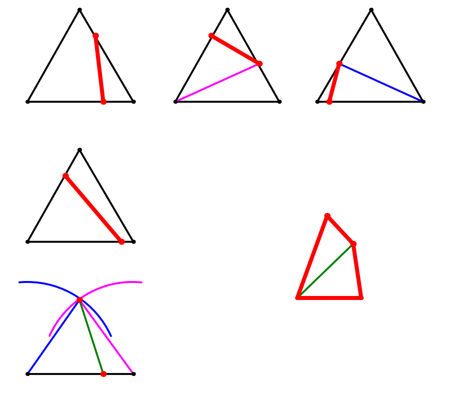
Voici dans un cas particulier différentes étapes de cette construction dans une figure du plan (la même démarche pourrait être faite sur le papier) qui communique avec une figure de l'espace.

Dans la figure Geospace, ABCD est un tétraèdre régulier, les points P, Q et R sont des points libres respectivement sur les arêtes [AB], [BC] et [CD].

On définit le point S comme point d'intersection du plan (PQR) avec la droite (AD).

La figure plane **importe seulement la position de chacun des points P, Q, R et S sur chaque arête** et reprend un dessin dans chaque face du tétraèdre pour construire pas à pas la section en reportant des longueurs.

Première étape : dans le triangle équilatéral ABC, on reporte les positions des points P et Q, ce qui permet de tracer [PQ].	**Deuxième étape** : dans le triangle équilatéral BCD, on reporte les positions des points Q et R, ce qui permet d'obtenir la longueur QR.
	

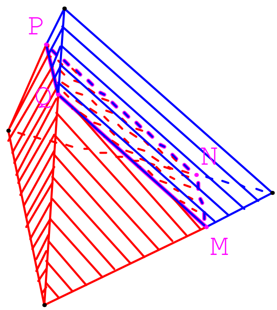
Troisième étape : dans le triangle équilatéral ACD, on reporte la position de R, on obtient ainsi les longueurs AR et BR pour tracer le triangle ABR qui nous permet d'obtenir la longueur PR donc de terminer la construction du point R.	**Quatrième étape** : dans le triangle ACD, on reporte la position de S, ce qui permet d'obtenir la longueur RS.
	
Cinquième étape : dans le triangle ABD, on reporte les positions de P et S, ce qui permet d'obtenir la longueur PS et de terminer la construction de S.	**Construction terminée.** Naturellement si on change la position d'un des points P, Q ou R dans la figure de l'espace, la figure plane s'actualise.
	

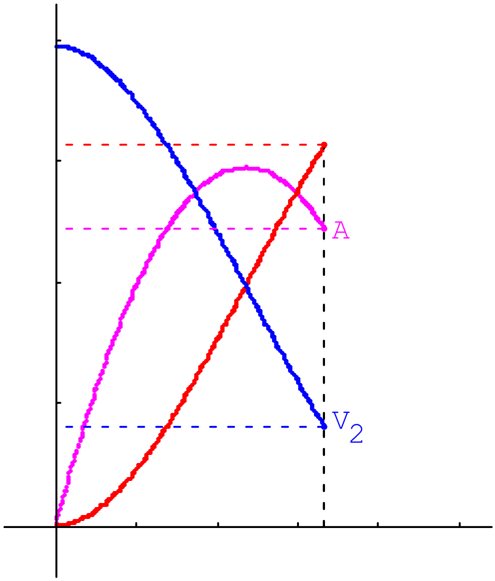
Exemple 3 : étude de l'aire maximale de la section d'un tétraèdre par un plan parallèle à deux arêtes opposées

La communication entre une figure de l'espace et une figure plane est très utile pour observer des fonctions définies géométriquement sur une figure de l'espace.

Dans l'exemple ci-dessous, ABCD est un tétraèdre quelconque et M un point quelconque de l'arête [BC]. On trace les points P, Q et N tels que MNPQ soit la section du tétraèdre avec le plan passant par M et parallèle aux arêtes (AB) et (CD). On note x la longueur BM, a l'aire de la section, v1 et v2 les volumes des deux convexes délimités par le plan de la section.

La figure plane importe les valeurs de x, a, v1 et v2. En définissant des points dans un repère, et en se plaçant en mode Trace, on peut obtenir point par point les courbes des fonctions. On peut ainsi observer le maximum de l'aire et constater que lorsque l'aire est maximale, le tétraèdre est découpé en deux convexes de même volume.





II - Présentation de Geoplan

Toute cette partie est reprise de la présentation de GeoplanW. Les nouvelles fonctionnalités de Geoplan sont décrites plus loin dans la brochure (prototypes, exemples).

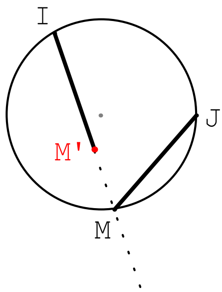
Geoplan permet de définir et de manipuler des objets géométriques du plan et des objets numériques : points, droites, cercles, nombres, transformations, repères, courbes, vecteurs, fonctions numériques, suites numériques, etc.
Les créations et manipulations peuvent être automatisées en créant des commandes. Geoplan est ainsi un logiciel "langage-auteur" d'imagiciels.

Voici un très bref aperçu de ses possibilités à travers quelques exemples ; les premiers s'intéressent à un domaine particulier et le dernier en utilise plusieurs. Le choix des situations a été guidé par la nécessité de créer dans chaque cas un petit nombre d'objets et d'obtenir cependant une image convaincante. Toutes les illustrations ont été obtenues par copier/coller depuis GeoplanW (version 1) vers le logiciel de traitement de texte.

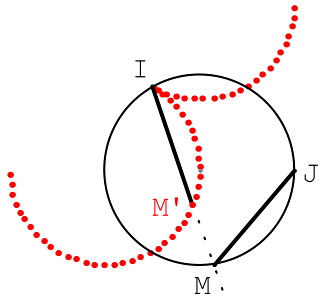
Geoplan et la "géométrie pure"

Un repère "absolu" prédéfini R_{oxy} permet de créer des objets géométriques fixes ; des points libres peuvent également être créés puis "pilotés" : on peut les faire varier (avec la souris, avec le clavier, ou encore en leur affectant une valeur particulière éventuellement choisie aléatoirement). Ces points libres serviront à construire des objets géométriques variables.

Dans l'exemple 1 ci-dessous les points I et J sont des points fixés sur un cercle, M est un point libre du cercle et M' est le point de la demi-droite [IM) tel que IM' = JM (figure 1). On s'intéresse à l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle. On peut obtenir ce lieu en laissant les traces du point M' lorsque M varie (figure 2). On peut aussi obtenir ce lieu en tant que courbe (figure 3) et, en prenant I point libre sur le cercle, s'intéresser aux variations du lieu lorsque I varie sur le cercle (figures 3 et 4).

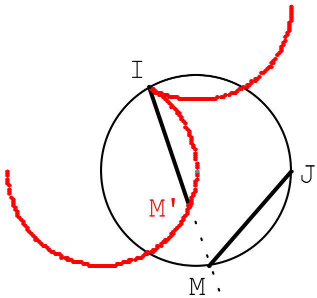


exemple 1: figure 1

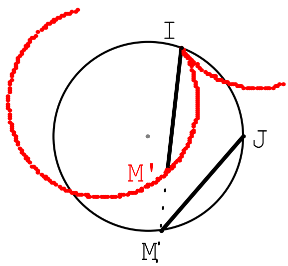


exemple 1: figure 2

On s'intéresse à l'évolution de cet ensemble lorsque I varie sur le cercle.



exemple 1 : figure 3



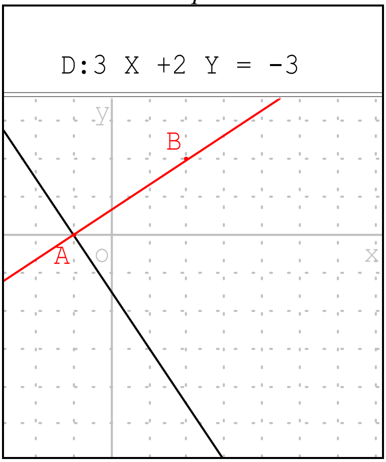
exemple 1 : figure 4

Geoplan et la "géométrie analytique"

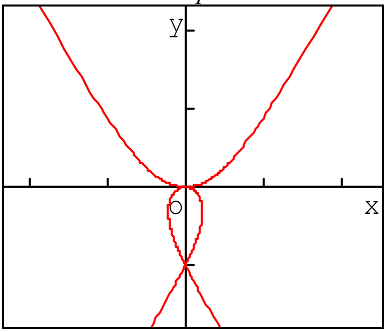
On peut créer des repères, des points et des vecteurs en donnant leurs coordonnées, des droites au moyen d'une équation, des courbes (cartésiennes, paramétrées, polaires) dans le repère prédéfini ou dans un repère créé par l'utilisateur.

Dans l'exemple 2 ci-dessous, A et B sont deux points libres à coordonnées entières et la droite D est la perpendiculaire à (AB) passant par A : chaque fois que l'on modifie la position de l'un de ces points, les affichages des équations des droites (AB) et D s'actualisent. Dans l'exemple 3, on a juste créé une courbe en coordonnées polaires.

exemple 2



exemple 3



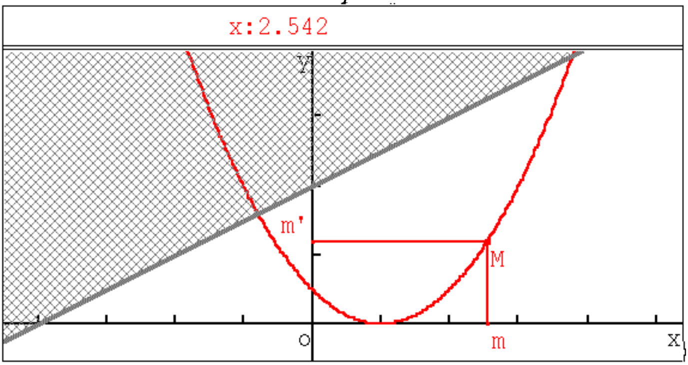
Courbe d'équation $\rho = \dfrac{\sin \theta}{2\cos\theta - 1}$

Geoplan et le "numérique".

On peut créer des objets numériques : constantes, variables numériques entières ou réelles, nombres définis à partir d'objets géométriques (longueur d'un segment, produit scalaire de deux vecteurs...) ou à partir d'une expression algébrique. Des fonctions numériques et des suites numériques peuvent également être créées. Tous ces objets ne donnent rien de visible à l'écran lors de leur création. Pour les "voir", il faut créer de nouveaux objets qui en dépendent : des affichages, des courbes représentatives et donc souvent faire une incursion dans le domaine de la géométrie analytique.

Dans l'exemple 4, on a créé une fonction f, sa courbe C, un point M qui varie sur C en le définissant de coordonnées (x , f(x)) avec x variable réelle libre dans [-10,10]. Si on ajoute le demi-plan défini par $Y \geq \dfrac{X}{2} + 2$, et l'affichage du réel x, on crée un imagiciel que l'on peut utiliser pour interpréter la résolution d'une inéquation du second degré.

exemple 4



On peut à tout moment, demander le "rappel des objets créés" dans lequel les expressions mathématiques sont dessinées comme le veut l'usage. Voici le rappel de quelques objets de l'exemple 4.

$\mathbf{R_{oxy}}$ repère orthonormal

f fonction: **x**|-> $\dfrac{\mathbf{(x-1)^2}}{\mathbf{2}}$

C graphe de **f** sur [**-10**,**10**] (**500** points, repère $\mathbf{R_{oxy}}$)

x réel libre de [**-10**,**10**]

M point de coordonnées (**x**,**f**(**x**)) dans le repère $\mathbf{R_{oxy}}$

P demi-plan d'inéquation $\mathbf{Y \geq \frac{X}{2} + 2}$ dans le repère $\mathbf{R_{oxy}}$

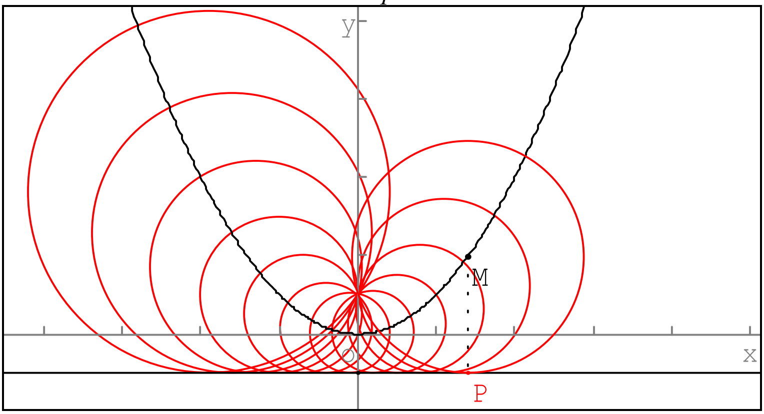
$\mathbf{A_{f0}}$ affichage du scalaire **x** (**3** décimales)

Geoplan logiciel de construction mathématique

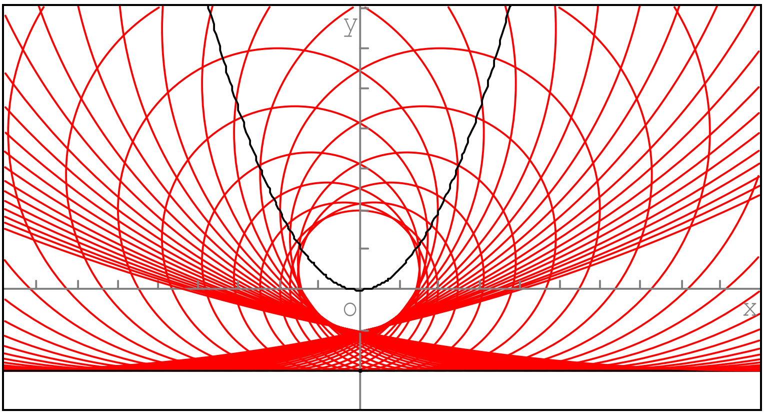
La séparation en trois domaines n'est due qu'à un choix d'exposition pour ce texte de présentation. Pour Geoplan, tous les objets sont des objets mathématiques qu'ils soient de nature géométrique ou numérique.

Dans l'exemple 5, on a défini une fonction trinôme f, sa courbe représentative dans le repère R_{oxy} , le point M de coordonnées (x , f(x)) où x est une variable réelle libre, une droite D définie par une équation, le projeté orthogonal P de M sur D et enfin le cercle de centre M passant par P. Si on a choisi pour D la directrice de la parabole, en faisant varier x et en laissant les traces du cercle, on observe que les cercles passent par un point fixe qui est le foyer (illustration ci-dessous).

exemple 5



Et avec un tel logiciel, on a vite la curiosité de regarder ce qui se produit lorsque la droite D n'est pas la directrice... Voici l'illustration dans un autre cas.



A l'utilisateur curieux de continuer l'exploration...

III - Présentation de Geospace

Toute cette partie **sauf ce qui concerne les maillages** est reprise de la présentation de GeospacW.

Geospace permet de créer et de représenter des figures de l'espace. Ces figures sont composées d'objets mathématiques fixes ou variables qui peuvent être de différentes natures : points, droites, plans, polygones, polyèdres convexes, sphères, cônes, cylindres … mais aussi vecteurs, transformations géométriques, variables numériques, fonctions, etc.

À chaque instant, Geospace offre une représentation de la figure sur l'écran ; celle-ci est construite à l'aide des valeurs qu'ont les variables à cet instant. L'utilisateur a la possibilité de changer les valeurs des variables libres de la figure. Le logiciel actualise immédiatement les valeurs de toutes les variables ainsi que la représentation sur l'écran.

Cette représentation sur l'écran dépend, en outre, de différents paramètres de représentation qui sont choisis par le logiciel à la création des objets et qui sont, ultérieurement, modifiables par l'utilisateur ; ces paramètres concernent, entre autres, les différentes "vues de la figure", le choix de la projection (orthogonale ou oblique) effectuée pour obtenir le dessin plan, le caractère opaque ou non de certains objets ainsi que les conventions de dessin associées (avec ou sans pointillés).

Les dessins Geospace peuvent être imprimés, soit directement à partir du logiciel, soit après importation dans des logiciels de traitement de texte où ils permettent de réaliser des illustrations.

Quelques créations et de nombreuses manipulations peuvent, de plus, être automatisées en créant des commandes. Cela permet de faire de Geospace un logiciel "langage-auteur" d'imagiciels.

Constituant une aide importante pour une meilleure appréhension des objets de l'espace, Geospace est un outil précieux pour l'enseignement de la géométrie dans l'espace à tous les niveaux (du collège jusqu'en premier cycle de l'enseignement supérieur).

Le logiciel est accompagné d'une documentation écrite qui a été conçue d'une part pour permettre une découverte assez rapide d'une partie de ses fonctionnalités d'autre part pour favoriser la réflexion autant sur des questions d'enseignement que sur des problèmes d'ordre mathématique.

Par ses possibilités multiples, la qualité et la variété de ses dessins, les effets esthétiques que l'on peut obtenir, en particulier ceux de rotations des objets, Geospace est un auxiliaire d'usage gratifiant, tout en restant dans un contexte conçu spécifiquement pour l'enseignement des mathématiques.

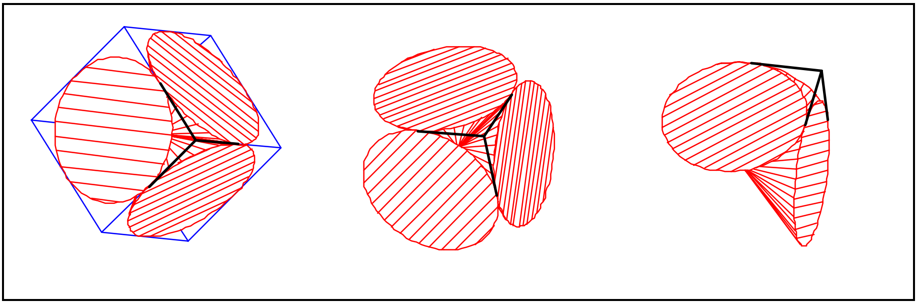
Geospace permet aussi de poser et d'analyser le problème de la représentation plane des objets de l'espace en mathématiques. Cette question, souvent occultée parce que difficile, n'est certainement pas sans influence sur la compréhension et la maîtrise que l'on peut avoir de la géométrie dans l'espace. L'observation de quelques dessins "problématiques" mais inévitables et l'exploration de la figure correspondante avec Geospace, sont de nature à ouvrir des horizons et alimenter la réflexion.

Voici un très bref aperçu des possibilités du logiciel à travers quelques exemples.

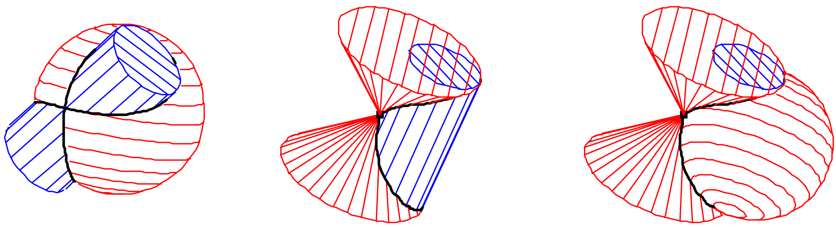
Geospace et la visualisation des objets de l'espace

Un des premiers problèmes qui se pose lorsque l'on fait de la géométrie dans l'espace est celui de la "visualisation" des objets qui sont le plus souvent représentés par un dessin (sur une feuille de papier, plane par nature …,) assorti d'une légende. Le logiciel Geospace permet d'obtenir rapidement un très grand nombre de dessins différents d'un même objet ce qui facilite l'appréhension de l'objet étudié.

Exemple 1 : il s'agit de calculer le volume restant entre un "coin" du cube et trois cônes ayant leur sommet au centre d'un cube et dont les bases sont trois cercles inscrits dans trois faces deux à deux adjacentes du cube. Dans cet exercice de niveau collège, le volume à calculer, très difficile à décrire rapidement et clairement, est aisément compréhensible à l'aide de Geospace. Cette situation est reprise et détaillée dans l'exemple "Cones" (répertoire Exemple1Espace).

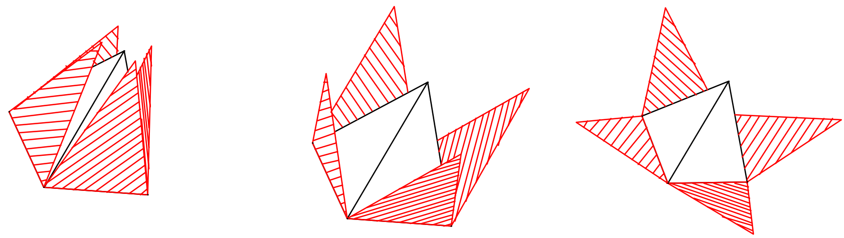


La qualité des dessins fournis par Geospace permet de voir des objets un peu compliqués comme, dans l'exemple 2 illustré ci-dessous, la fenêtre de Viviani qui est une courbe de l'espace intersection d'une sphère, d'un cylindre et d'un cône.



Une sphère et un cylindre Un cylindre et un cône Les trois

Exemple 3 : il illustre différentes étapes de "l'ouverture" d'un patron de solide, notion exploitable à l'école primaire comme au collège (Geospace permet de créer directement des patrons de polyèdres convexes et d'animer facilement leurs ouvertures).



Geospace et la visualisation des surfaces : maillages

Geospace ne permet la création et la représentation "correcte" que de quelques types de solides "élémentaires" comme les sphères, polyèdres convexes, cônes, cylindres etc.

Il est cependant possible de visualiser plus ou moins clairement toutes sortes d'autres surfaces en créant des **maillages**.

Donnons ici une brève description de ce que Geospace entend par le terme "maillage".

Soient u une variable réelle dans l'intervalle [a, b] et v une variable réelle dans l'intervalle [c, d]. Si x, y et z sont fonctions de u et v, le point de coordonnées (x, y, z) décrit une surface dans l'espace lorsque u et v varient.

Quand u est fixé, le point décrit une courbe sur la surface lorsque v varie ; il en est de même quand v est fixé. Quand on prend un ensemble de n valeurs régulièrement espacées de a à b pour u, on obtient donc un réseau de n courbes. De même avec v en prenant p valeurs régulièrement espacées de c à d.

Les np points de la surface correspondants aux valeurs de u et de v ainsi choisies forment les points d'un maillage de la surface. Un tel maillage peut être représenté par ces points mais aussi en joignant ces points par des segments en suivant les courbes du réseau (option par défaut).

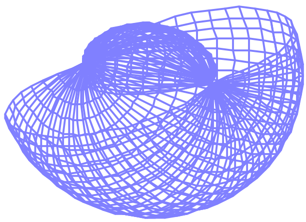
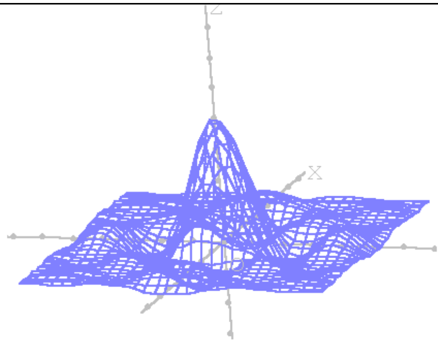
Deux choix sont proposés pour la création d'un maillage : lieu d'un point avec deux pilotes ou graphe d'une fonction à deux variables. Ces deux choix sont illustrés dans les exemples ci-dessous.

Dans le premier cas, les deux pilotes doivent être "à une dimension et bornés", comme une variable libre dans un intervalle, un point libre sur un segment, sur un cercle ou sur un arc de cercle (mais pas sur une sphère ou dans un polygone). Les variables numériques u et v de la description ci-dessus sont celles définissant les positions de chaque pilote (dans le premier exemple ci-dessous, u et v sont des variables libres dans un intervalle).

Dans le deuxième cas (graphe d'une fonction à deux variables), les variables u et v sont simplement l'abscisse et l'ordonnée, le point de la surface étant le point de coordonnées (x, y, f(x, y)). On aurait pu faire entrer ce cas dans le premier, mais il est séparé pour des raisons de commodité pour l'utilisateur.

Comme dans toutes les représentations faites par Geospace mais de manière encore beaucoup plus nette ici, ce sont les changements de vue qui permettent de voir la surface grâce au maillage qu'elle porte.

Les exemples représentés ci-dessous sont décrits plus précisément dans le chapitre Exemples et les fichiers correspondants se trouvent dans le répertoire Espace2002.

	
Ensemble des points M (x,y,z) avec $x = (1 - 2\cos u)\cos v$ $\quad u \in [-\pi,\pi]$ $y = (1 - 2\cos u)\sin v$ $\quad v \in [0,\pi]$ $z = 3 \sin u$ <u>Nom du fichier</u> : Panier	Surface sur $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ représentant la fonction $(x,y) \longmapsto \dfrac{\sin(2x)\sin(2y)}{xy}$ <u>Nom du fichier</u> : PaysageSinusoidal

Geospace et les problèmes de section dans l'espace.

Tout à fait classiques, les problèmes d'intersection dans l'espace sont facilités par l'utilisation d'un logiciel comme Geospace. Dans l'exemple 4 suivant, on étudie la section d'un cube par un plan passant par un point M du segment [GE] et qui reste parallèle au plan défini par les trois points E, B et D. Les illustrations 1 et 2 montrent la section du cube obtenue pour deux points M différents. Dans l'illustration 3, la section de l'illustration 2 est mise de face.

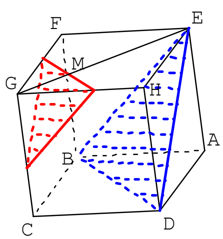


Illustration 1

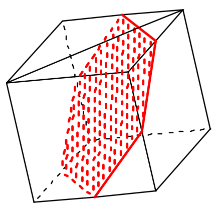


Illustration 2

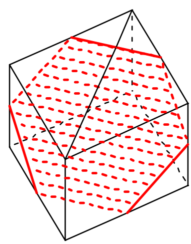


Illustration 3

Geospace , la géométrie "pure", le "numérique".

On peut créer des objets numériques : constantes, variables numériques entières ou réelles, nombres définis à partir d'objets géométriques (longueur d'un segment, produit scalaire de deux vecteurs...) ou à partir d'une expression algébrique. Des fonctions numériques peuvent aussi être créées.

Ces objets ne donnent rien de visible à l'écran lors de leur création. Pour les "voir", il faut créer de nouveaux objets qui en dépendent : comme, par exemple, des affichages.

Dans l'exemple 5 suivant, deux carrés de côté 1 ont un côté en commun et sont situés dans des plans perpendiculaires. Pour tout réel x compris entre 0 et 1, on définit les points M et N par $\overrightarrow{AM} = x\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{FN} = x\,\overrightarrow{FD}$.

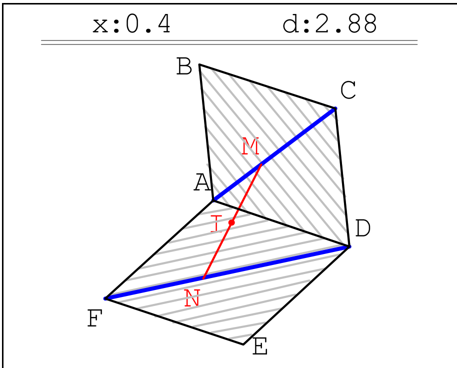


Illustration 1

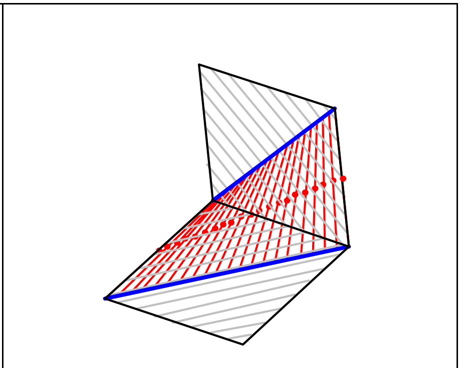


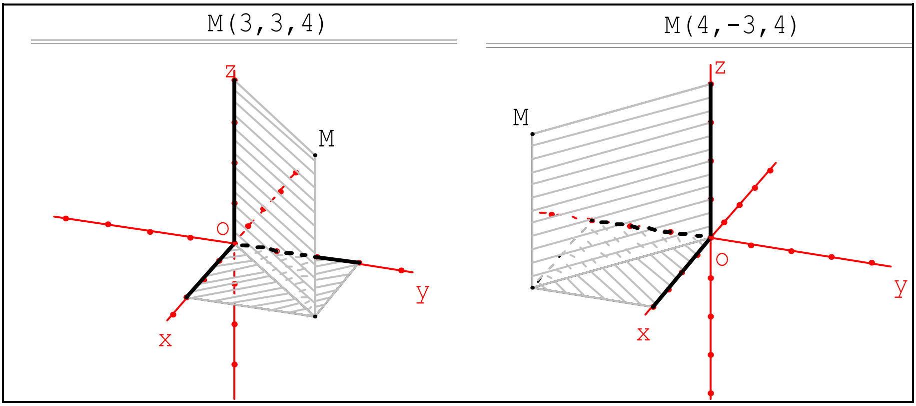
Illustration 2

On s'intéresse à la longueur MN notée d lorsque x varie (illustration 1). On peut aussi démontrer que la droite (MN) reste parallèle à un plan fixe et enfin chercher le lieu du milieu I du segment [MN] (illustration 2).

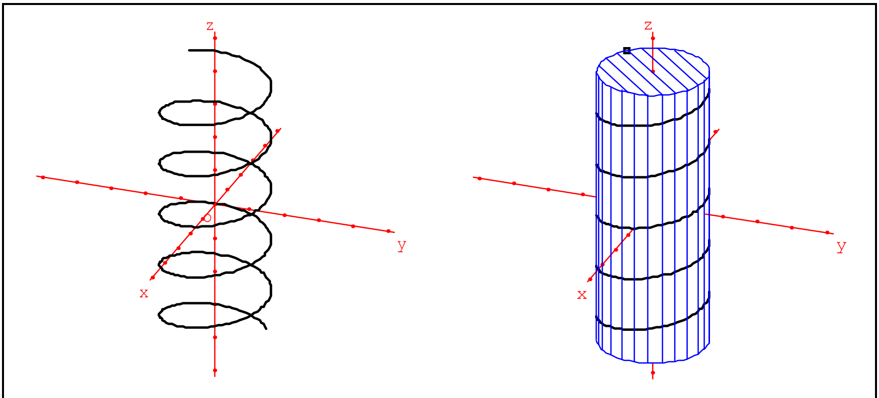
Geospace et la "géométrie analytique"

On peut créer des repères, des points et des vecteurs en donnant leurs coordonnées, des plans au moyen d'une équation, des courbes paramétrées.

Exemple 6 : illustration de la notion de coordonnées d'un point dans un repère de l'espace.

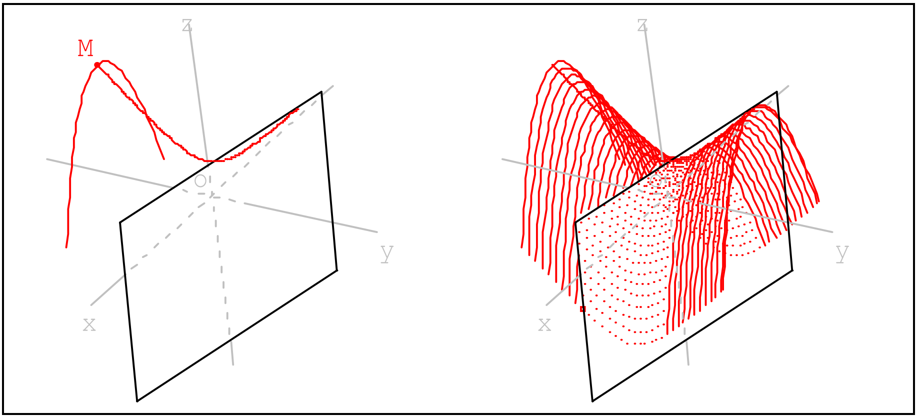


Exemple 7 : l'hélice circulaire est définie par une représentation paramétrique.



Une hélice circulaire La même "enroulée" sur un cylindre

Exemple 8 : on peut voir un paraboloïde hyperbolique coupé par un plan. La surface est engendrée par un arc de parabole variable dont le sommet est situé sur un arc d'hyperbole du plan yoz.



Geospace et les problèmes de représentation des objets de l'espace

Quand on dessine un cube dans le cadre d'une activité mathématique, il est d'usage de le dessiner comme le montre l'illustration 1, avec une face "de face" représentée par un carré.

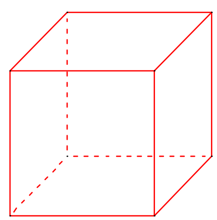


Illustration 1

Quand on dessine une sphère, on dessine en général quelque chose ressemblant à l'illustration 2.

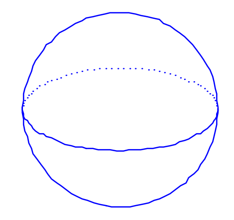


Illustration 2

Il faut savoir qu'il n'est pas possible d'obtenir ces deux dessins avec les mêmes conventions de représentation. Il est donc, par exemple, impossible de voir avec Geospace ces deux types de dessin dans la même fenêtre.

Autrement dit, les conventions usuelles varient avec l'objet que l'on veut suggérer !

Le dessin d'un objet est une projection sur un plan parallèlement à une droite : dans l'illustration 1 la projection est oblique alors que, dans l'illustration 2, la projection est orthogonale.

Les dessins suivants montrent ce que l'on peut obtenir simultanément, avec Geospace par exemple, quand on représente une sphère et un cube (avec une face de face) dans une même figure.

Projection oblique

Projection orthogonale

En projection orthogonale le cube est entièrement "caché" par sa face "de face". En projection oblique, la sphère prend une forme ovoïde que l'on a quelques difficultés à accepter.

Ces dessins montrent bien qu'à un moment ou à un autre il faut prendre le temps de s'interroger sur les conventions de représentation et leurs principes mathématiques. Ces questions de projection ne sont, d'ailleurs, qu'un exemple des problèmes que pose la représentation plane des objets de l'espace. Le logiciel Geospace offre une aide précieuse pour poser clairement ces problèmes.