

Quelques réflexions sur les objets de Geoplan-Geospace

I - La notion de figure dans Geoplan-Geospace

La lecture de ce chapitre n'est pas indispensable pour utiliser Geoplan-Geospace. On y trouvera cependant une aide à la compréhension de la philosophie sur laquelle est basé ce logiciel et qui en a guidé la conception.

Nous reprendrons dans ces réflexions une partie de ce qu'on peut trouver dans les textes accompagnant les logiciels Geoplan (sous DOS), GeoplanW et GeospacW (sous Windows) qui sont des logiciels de construction dans le plan et dans l'espace, ainsi que des considérations accompagnant l'ensemble "Géométrie dans l'espace" de la série "Activités avec imagiciels".

Avertissement

Comme dans toute tentative de "théorisation", il est nécessaire d'utiliser des mots et des locutions en leur donnant un sens précis dans la théorie. Ces mots ont en général une signification plus ou moins vague dans la langue courante, ainsi que dans l'usage en mathématique de cette langue. Ainsi en est-il des mots "figure", "dessin", "objet", "maquette", "élément", "position", "valeur" ainsi que d'autres dont nous nous servons ici.

Il ne faut pas voir dans ce texte une tentative de normalisation du vocabulaire mais une proposition sans doute améliorable de fournir des outils pour décrire, comprendre et peut-être faire comprendre un certain nombre de choses sur le fonctionnement interne et externe d'un logiciel de construction comme Geoplan-Geospace.

Nous resterons dans le cadre des mathématiques et surtout de leur enseignement qui est celui de l'usage prévu par le logiciel et pour lequel il a été conçu. Tout ce qui suit a fait l'objet de nombreux débats passionnés au sein de l'équipe du CREEM, sans toujours arriver facilement à un consensus surtout au niveau du vocabulaire. Sur ce point d'ailleurs, nous avons été un peu piégés par nos travaux

en géométrie plane où la terminologie adaptée à ce cas se révèle moins parlante dans l'espace (qu'est-ce qu'un dessin dans l'espace ?).

L'expérience portant tant sur nous mêmes que sur des collègues enseignants de mathématiques ou d'autres disciplines et sur des élèves prouve qu'il y a une réelle demande pour des explications sur le sujet.

Une grande partie des considérations suivantes concerne aussi bien les figures-Geoplan que les figures-Geospace. Aussi nous les traiterons ensemble. Les différences profondes apparaîtront au niveau des représentations et demandent un discours spécifique pour l'espace.

Éléments ou objets constituants d'une figure

À l'aide des menus ou en agissant directement sur le texte de la figure, l'utilisateur constitue une *figure-Geoplan (resp. -Geospace)* en ajoutant aux "éléments" ou "objets" (nous utiliserons indifféremment ces deux mots) prédéfinis (origine o , axes, plans de coordonnées etc.) des éléments reliés éventuellement à ceux-ci (par exemple un point repéré dans le repère canonique, le vecteur $\vec{i} + \vec{j}$, l'intersection d'un cercle avec un axe de coordonnées etc.) et reliés éventuellement entre eux par le fait que certains sont construits à partir d'autres. Le logiciel garde en mémoire une description de la figure (pour simplifier, nous utiliserons le mot "figure" à la place de "figure-Geoplan resp. -Geospace") et peut la restituer en langage mathématique par action sur le bouton rappel de la barre d'outils ou l'article de menu correspondant.

Objets fixes, objets variables, valeurs des objets

Les objets constitutifs d'une figure peuvent être classés en deux types : ceux qui sont *fixes* ou *constants* et ceux qui sont *variables*.

Exemples d'objets fixes :

dans le plan : la droite d'équation $y = 2x + 1$ dans le repère canonique, le cercle de centre le point de coordonnées $(1, -1)$ passant par l'origine o .

dans l'espace : le point de coordonnées $(0,1,-1)$, la sphère de centre o et de rayon π , la rotation d'axe ox et d'angle 30° .

Exemples d'objets variables :

une variable réelle dans l'intervalle $[-1, 1]$,

un point libre sur une droite.

Un objet variable est plus précisément une *variable*, au sens habituel en mathématiques, qui prend ses valeurs dans un ensemble d'objets fixes comme un ensemble de points, de nombres, de cercles, de rotations, de fonctions etc.

Une variable est à distinguer de sa valeur : cette valeur peut changer pour une même variable et c'est justement l'intérêt d'un logiciel comme Geoplan-Geospace de pouvoir faire *changer les valeurs d'une même variable*.

La valeur d'un objet peut ne pas exister par moment comme le cercle d'intersection d'un plan et d'une sphère variables qui ne se coupent pas à un tel moment.

Nous avons choisi de qualifier de *valide* un objet dont la valeur existe : ainsi un objet peut-il temporairement ne plus être valide ou même ne pas être valide lors de sa création.

Notons d'ailleurs que la manière dont nous nous exprimons a tendance à entraîner la confusion entre variable et valeur car nous parlons à tort de "point variable", de "nombre variable" etc. alors qu'un point variable n'est pas un point mais une variable dont les valeurs sont des points tout comme un nombre variable n'est pas un nombre mais une variable dont les valeurs sont des nombres (variable "numérique")².

Ainsi, la phrase ci-dessus :

"La valeur d'un objet peut ne pas exister par moment comme c'est le cas pour le cercle d'intersection d'un plan et d'une sphère variables qui ne se coupent pas."

devrait être transformée en

"La valeur d'un objet peut ne pas exister par moment comme c'est le cas pour le cercle d'intersection d'un plan et d'une sphère variables dont les **valeurs** ne se coupent pas."

Un objet fixe peut être considéré comme une variable qui ne prend qu'une seule valeur avec laquelle d'ailleurs on le confond en général, ce qui rend légitime de parler des *valeurs des objets*, qu'ils soient fixes ou variables.

À chaque instant, la valeur de chaque objet, quand cette valeur existe, est stockée dans la mémoire de l'ordinateur, en général sous forme numérique. Par exemple, pour les figures de l'espace, on garde :

pour un point ou un vecteur, ses coordonnées, donc trois nombres,

pour une sphère, le centre et le rayon, donc quatre nombres,

pour un cercle, le centre, un vecteur normal, le rayon et un point, soit 10 nombres.

Pour d'autres types d'objets, on garde la valeur sous une autre forme : ainsi une fonction est stockée sous forme d'une expression, un lieu de points sous forme codée plus complexe.

² Il s'agit là d'un abus de langage connu qui fait que l'adjectif utilisé (ici "variable") ne qualifie pas l'entité à laquelle il s'applique mais au contraire en modifie la nature (de manière apparemment contradictoire comme dans "faux témoin" qui n'est pas un témoin ou "liquide gelé" qui n'est pas un liquide...).

Pour les figures-Geoplan, les objets sont rassemblés en **types-Geoplan**, correspondants aux différents items terminaux du menu *Créer*. Ces différents types peuvent être regroupés en **genres**, selon la nature de la valeur des objets de ces types. Ainsi un objet peut être de **genre point**, de **genre droite**, de **genre transformation** suivant que sa ou ses valeurs sont des points, des droites ou des transformations.

Il en est de même pour les figures-Geospace, mutatis mutandis.

Objets "dessinables"

Les valeurs de certains objets d'une figure-Geoplan sont des parties de \mathbb{R}^2 comme c'est le cas avec les points, les segments, les cercles, les polygones etc. Comme en général on peut représenter sur l'écran ces valeurs, nous qualifierons ces objets de "dessinables". On ne peut pas représenter de cette façon les valeurs d'autres objets comme les transformations, les nombres, les fonctions, les vecteurs. Nous qualifierons ces objets de "non dessinables".

Il en est de même pour les figures-Geospace, dont certains objets sont des parties de l'espace, et qui seront aussi qualifiés de dessinables. Cependant, dans ce cas notons que certains objets ont un statut ambigu par rapport à cette définition : c'est le cas des plans qui sont des parties de \mathbb{R}^3 et que pourtant nous avons renoncé à représenter dans le cas d'une figure-Geospace (alors que nous avons choisi de le faire pour les droites).

D'autre part, à un instant donné, certains objets dessinables peuvent ne pas pouvoir être représentés parce qu'ils n'ont pas de valeur ou qu'ils ont une valeur que le logiciel ne peut représenter avec le cadrage choisi, comme un point dont les coordonnées sont trop grandes. On peut aussi interdire à Geoplan-Geospace de représenter un objet dessinable en utilisant la boîte de styles.

Variables libres, variables liées

Les variables **libres** sont celles dont on peut choisir librement la valeur, en respectant bien sûr les contraintes dues à leur définition. Dans Geoplan-Geospace, les variables libres sont seulement du genre point (point libre dans l'espace ou le plan, sur une droite, sur un segment etc.) ou du genre scalaire (variable numérique réelle, entière, dans un intervalle etc.). La valeur d'une telle variable peut être choisie en utilisant le clavier (pilotage d'une variable libre scalaire ou de point) ou la souris (pour les points seulement) ou encore par affectation.

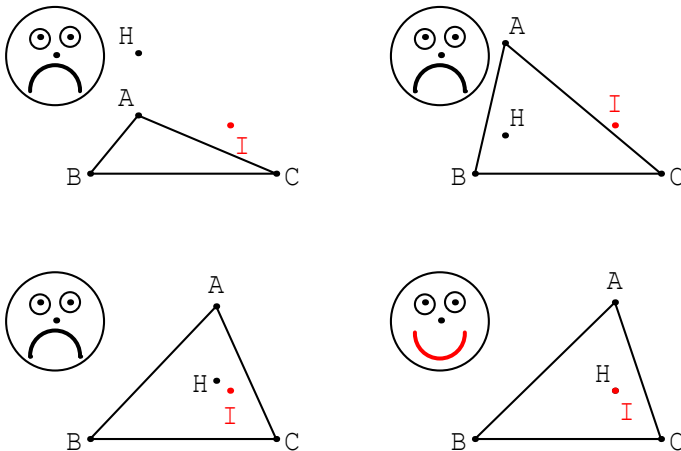
Les objets *liés* sont ceux qui sont construits en utilisant d'autres objets : ainsi, à partir de variables libres (et de constantes) peut-on construire de nouveaux objets, éventuellement variables. Par exemple, le plan médiateur de deux points, éventuellement variables, est lié à ces deux points et donc variable si l'un au moins des deux points l'est.

Chaque fois qu'une variable libre de la figure voit sa valeur modifiée, Geoplan-Geospace actualise la valeur de tous les objets qui sont concernés par ce changement, c'est-à-dire toutes les variables liées directement ou indirectement à cette variable libre.

Figure-Geoplan et dessin

Ce que nous nommons une *figure-Geoplan* est constituée des objets créés et de la façon dont ils sont reliés éventuellement les uns aux autres. Elle est décrite par un texte, *le texte de la figure*, qui contient aussi d'autres renseignements de couleur et de position à l'instant où il est consulté.

Voici quatre dessins obtenus à partir d'une même figure. Il s'agit d'un jeu de cible où l'utilisateur doit placer le point A pour que l'orthocentre H du triangle ABC soit en I (cf. OrthoJeu dans Exemples page 88)



II - Les représentations planes des objets de l'espace dans le cas des figures-Geospace

Dans le cas des figures-Geoplan, la notion de dessin est simple puisque l'écran est assimilable à une fenêtre sur le plan de la figure. Il n'en est pas de même pour les figures-Geospace pour trois raisons :

- les objets à représenter sont (ou plutôt ont leurs valeurs) dans l'espace,
- la représentation se fait sur un plan (assimilable encore au plan de l'écran),
- il est possible de "changer de vue" en tournant.

Ceci justifie que ce problème de représentation demande quelques explications.

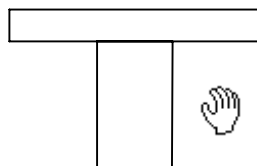
Différentes vues d'une même figure

Commençons par une activité d'introduction destinée à ceux qui n'ont jamais manipulé une figure-Geospace.

- Lancez Geoplan-Geospace. Chargez la figure "Elemvues.g3w" (répertoire ObserveEspace).

Faire tourner l'objet au moyen de la souris

- Vous disposez d'une figure-Geospace. On voit à l'écran deux rectangles. Appuyez sur le bouton droit de la souris, le curseur se transforme en main légèrement incurvée. Bougez doucement la souris en maintenant le bouton droit enfoncé. Vous obtenez différentes vues d'un objet de l'espace.



Comment est composé cet objet ?

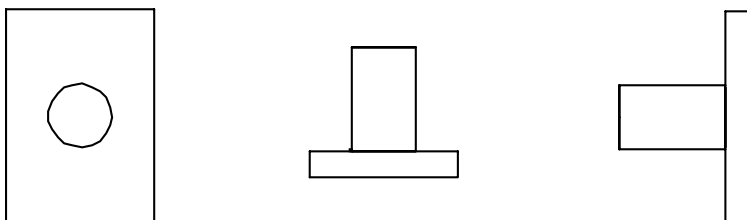
Position initiale

Grâce à cette possibilité de mouvement, vous avez "vu" l'objet sous différents angles. Pour le remettre dans sa position initiale, maintenez appuyée la touche Ctrl et appuyez sur la touche F1 ou dans le menu *Vues* utilisez l'article *Vue initiale*.


Remarque : dans toutes les manœuvres suivantes, pour reprendre en cas d'erreur, utilisez ce retour à la position initiale (raccourci clavier Ctrl F1).


Entraînement


Afin d'acquérir un peu de maîtrise dans le maniement de la souris pour faire tourner l'objet, essayez d'arriver à produire à l'écran les dessins suivants :

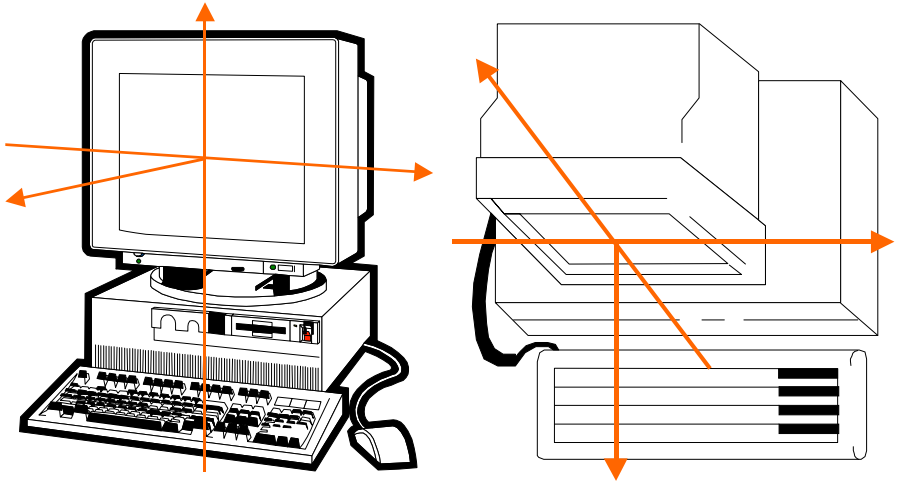


Faire tourner l'objet en utilisant le clavier

Revenez à la position initiale. En partant de cette position initiale, enfoncez la touche MAJ et, en la maintenant enfoncée, appuyez successivement dix huit fois sur la flèche droite  du clavier. L'objet tourne d'un quart de tour autour d'un axe vertical. En effet, chaque appui sur la flèche fait tourner de 5°, ce qui fait 90° en 18 appuis.

Revenez à la position initiale par Ctrl F1. En partant de cette position initiale, enfoncez la touche MAJ et, en la maintenant enfoncée, appuyez successivement dix huit fois sur la flèche vers le bas  du clavier. L'objet tourne d'un quart de tour autour d'un axe horizontal situé dans le plan de l'écran.

Revenez à la position initiale par Ctrl F1. En partant de cette position initiale, enfoncez la touche MAJ et, en la maintenant enfoncée, appuyez successivement dix huit fois sur la touche PgUP  du clavier. L'objet tourne d'un quart de tour autour d'un axe horizontal perpendiculaire à l'écran.



Sur les dessins ci-dessus, on a représenté les axes correspondants à ces trois types de rotations.

Remarque importante

Les trois types de rotations indiqués ci-dessus peuvent se combiner : si on ne revient pas à la position initiale, quand on change d'axe de rotation c'est l'objet dans sa position actuelle qui va tourner autour de l'axe choisi.

Résumé

Axe	Vertical	Horizontal dans l'écran	Horizontal perpendiculaire à l'écran
Combinaison de touches	MAJ-Flèche Droite MAJ-Flèche Gauche	MAJ-Flèche Haut MAJ-Flèche Bas	MAJ-PgUp MAJ-PgDown

Reprenez les dessins proposés pour l'entraînement à la souris et essayez de les réaliser en faisant tourner l'objet au clavier.

Pour aller plus loin

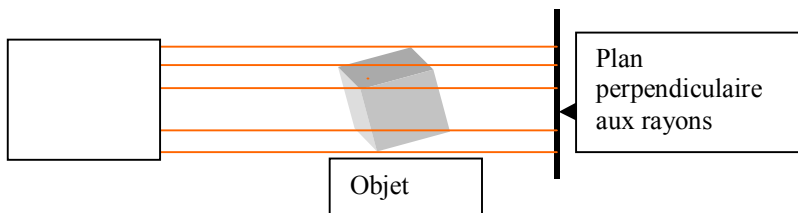
On peut se contenter dans un premier temps d'acquérir suffisamment d'habileté et d'entraînement pour arriver à positionner l'objet sur lequel on travaille comme on le souhaite, même au prix de quelques tâtonnements.

Il est cependant intéressant de réfléchir à un certain nombre de questions concernant ce qu'on voit à l'écran.

Principes de base

Ombre au soleil

Oublions un instant l'ordinateur et pensons à l'objet comme éclairé par une source de lumière très éloignée (par exemple le soleil) de sorte que, à peu de choses près, les rayons lumineux soient parallèles entre eux. Sur n'importe quel plan perpendiculaire aux rayons lumineux, l'ombre de l'objet forme un dessin.



Quand on fait tourner l'objet dans l'espace autour d'un axe, ce dessin plan (l'ombre) se modifie.

À quelques réserves près (voir plus loin), on peut considérer que ce qu'on voit sur l'écran est assimilable à ce qu'on verrait si on y représentait cette ombre. Ceci est vrai parce que le logiciel, pour réaliser le dessin à l'écran, effectue les calculs correspondant exactement à cette situation d'ombre au soleil.

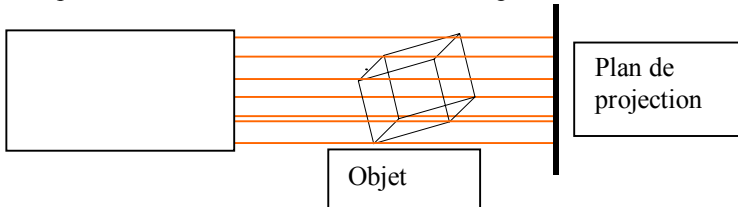
Les limites de cette interprétation

Il est clair que cette interprétation ne doit pas être prise au pied de la lettre, mais seulement dans son principe.

En effet le dessin obtenu ne ressemble en général pas à l'ombre d'un objet plein, pas plus d'ailleurs qu'à celle d'un objet en "fil de fer" car certaines parties (sommets, arêtes, etc.) qu'on ne distinguerait pas dans le cas de l'ombre sont visibles sur l'écran.

Projection orthogonale

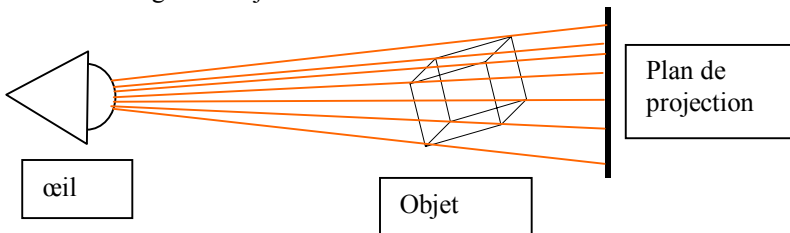
En fait, le procédé utilisé dans le logiciel pour faire les calculs donnant le dessin à l'écran est une projection orthogonale : par chaque point de l'objet de l'espace on fait passer une droite perpendiculaire au plan sur lequel on projette et on représente sur ce plan l'intersection de cette droite avec ce plan.



Remarque sur la vision

Dans le cas d'une figure de l'espace, nous savons maintenant que ce que Geoplan-Geospace nous montre à l'écran est une projection orthogonale. Cependant, nous avons l'impression de voir l'objet lui-même. D'où cela vient-il ?

Si nous regardons l'objet (supposé matérialisé, de taille limitée et placé devant le plan de projection) avec assez de recul en nous plaçant de telle sorte que nous le voyions à peu près dans la direction perpendiculaire au plan de projection, les rayons lumineux issus des différents points de l'objets sont "presque perpendiculaires" au plan de projection. Ce sont ces rayons entrant dans notre œil qui forment l'image de l'objet sur notre rétine.

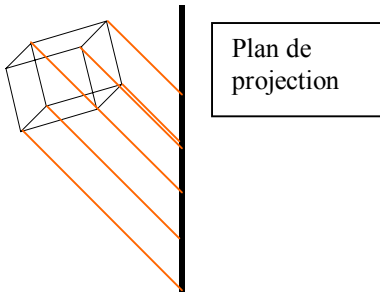


On voit que si on remplace cet objet par sa projection orthogonale sur le plan, les rayons lumineux issus des points de cette projection et entrant dans l'œil formeront une image peu différente de la précédente et nous donneront donc l'illusion de voir l'objet.

Projection oblique

Dans Geoplan-Geospace, pour une figure de l'espace, il est possible d'utiliser une projection oblique au lieu d'une projection orthogonale. Pour en faire l'expérience, recharger la figure de départ et utiliser l'article *Projection oblique* du menu *Vues* ou le bouton ci-contre.





Le logiciel calcule la position des intersections avec le plan de projection des droites parallèles à la direction de projection (correspondant à celle des rayons du soleil) passant par les points de l'objet.

On peut dire qu'alors tout se passe comme si on regardait l'ombre de l'objet sur un plan qui n'est plus perpendiculaire aux rayons du soleil (comme l'ombre sur le sol en fin d'après-midi).

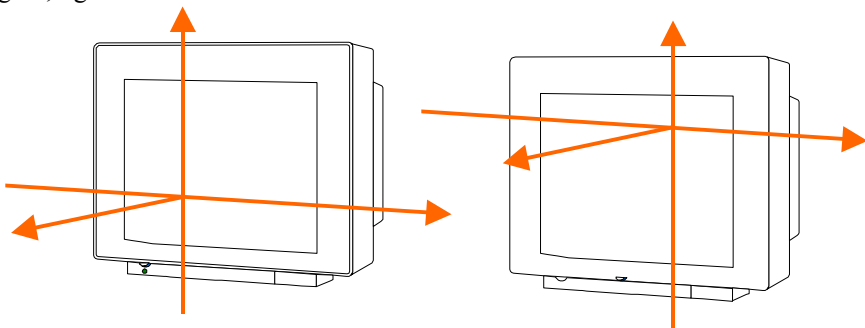
Il est d'ailleurs possible de modifier la direction de projection (voir l'aide en ligne).

Position de l'objet, des axes de rotation

Il n'est pas nécessaire d'imaginer que le système des trois axes de rotation fixes (que nous avons évoqués à propos de l'utilisation du clavier pour faire tourner l'objet) est placé comme nous l'avons décrit plus haut. Il peut être cependant plus agréable pour certains utilisateurs de penser au centre de l'écran comme à un point fixe (par rapport aux mouvements de l'objet déclenchés par la souris bouton droit enfoncé ou les rotations au clavier). Ce point fixe se nomme "o" (lettre o minuscule).

Changement de cadrage

Il est en fait faux de dire que le point o est fixe car il est possible de le déplacer avec la souris (en maintenant le bouton droit appuyé avec la touche MAJ du clavier enfoncée) ou avec les combinaisons de touches Ctrl + MAJ + Flèches ou PgUP, PgDwn.



Rotations en utilisant la souris

Nous pouvons expliciter maintenant l'action de la souris bouton-droit-enfoncé.

Deux cas sont possibles :

- déplacement avec option "Plan de face maintenu de face" non cochée, qui se fait avec le curseur en forme de main sans flèche



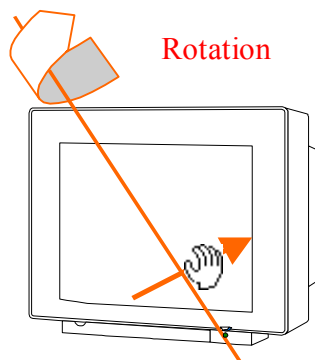
- déplacement avec option "Plan de face maintenu de face" cochée, qui se fait avec le curseur en forme de main avec une flèche



Option "Plan de face maintenu de face" non cochée

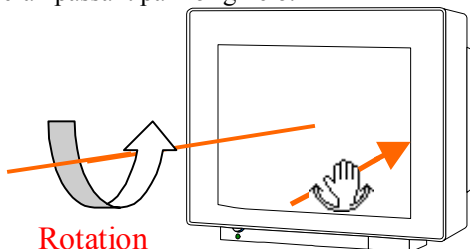
Lors d'un tel déplacement de la souris, le logiciel lit le plus fréquemment possible la position du curseur, calcule et fait tourner, puis recommence (lecture, calcul, rotation) et ainsi de suite tant que le bouton droit est enfoncé.

Entre deux positions successives ainsi lues, le logiciel fait tourner l'objet autour d'un axe situé dans l'écran, passant par l'origine o , et perpendiculaire au déplacement défini par ces deux positions successives.



Option "Plan de face maintenu de face" cochée

Dans ce cas, les déplacements du curseur donnent des rotations autour de l'axe perpendiculaire à l'écran passant par l'origine o .



Le plan passant par o qui était de face est alors maintenu de face dans la rotation. Voir l'aide et la description des menus pour plus de précision.

Coordonnées

Parmi les objets prédéfinis de toute figure-Geospace on trouve le repère R_{xyz} (et certains objets liés comme l'origine o , les plans de coordonnées etc.).

Partant d'une nouvelle figure (menu *Fichier*) en appuyant sur le bouton ci-contre, ou en utilisant l'article *Repère R_{xyz} affiché* du menu *Afficher*, ou par la combinaison de touches MAJ + R, on fait apparaître l'origine et les axes de coordonnées de R_{xyz} .



Figure-Geospace et représentation de la figure, "maquette virtuelle"

La figure-Geospace est constituée des objets créés avec les liens éventuels entre eux. Elle est décrite par un texte que l'on peut consulter en appelant les rappels (bouton ou item de menu).

Exemple :

A point libre dans l'espace

Segment [oA]

M milieu du segment [oA]

À un instant donné, les objets valides de la figure ont chacun une valeur qui, comme nous l'avons dit, est stockée dans les mémoires de l'ordinateur et peut aussi être décrite par du texte : pour les variables libres, ce texte se voit lorsqu'on ouvre l'éditeur de texte de la figure.

Exemple :

A point libre dans l'espace

Objet libre A, paramètres: -0.76, 2.6, 4.35585

L'ensemble des valeurs des objets constitue ce qu'on peut appeler **la valeur de la figure** à cet instant. Pour une part (correspondant aux objets dessinables), voire dans sa totalité, la valeur de la figure est une partie de \mathbb{R}^3 . Pour parler commodément et de manière imagée de cette partie de l'espace, nous proposons de la baptiser **maquette virtuelle**³, le mot maquette étant destiné à souligner qu'il ne s'agit pas de la représentation plane et le mot virtuelle rappelant que cet "objet géométrique" n'existe que dans sa description dans la mémoire de l'ordinateur (en termes de coordonnées principalement).

³ Cette locution est d'ailleurs utilisée dans le domaine de la conception assistée par ordinateur avec, semble-t-il, à peu près le même sens qu'ici.

Dans le cas des figures de l'espace, Geoplan-Geospace fournit des représentations planes⁴ ; ce qu'il affiche à l'écran n'est pas la valeur de la figure (qui est à trois dimensions) mais sa projection, orthogonale ou oblique suivant le réglage du logiciel, sur le plan de l'écran. La différence est donc importante avec le cas d'une figure plane, dans lequel on peut confondre en général sans danger ce qu'on voit à l'écran avec une approximation matérielle de la valeur de la partie dessinable de la figure.

Paramètres de représentation

On peut dire que quand on "fait tourner" par les MAJ Flèches du clavier ou par l'action de la souris avec le bouton droit enfoncé, ce n'est pas la figure qui tourne : celle-ci est inchangée par cette action et d'ailleurs le texte des rappels ne varie pas. Ce qui tourne, c'est l'espace \mathbb{R}^3 "rigidement" attaché au repère R_{xyz} (repère faisant partie de la figure) et il tourne par rapport au repère absolu lié à l'écran (qui ne fait pas partie de la figure). Comme la maquette virtuelle est "constante" dans le repère R_{xyz} (puisque'elle est obtenue en affectant toutes les variables de la figure), on la "voit tourner" dans l'espace absolu dans lequel est l'ordinateur.

Problèmes terminologiques

Un problème qui n'est pas simple est celui de la terminologie à utiliser pour décrire les différentes notions intervenant dans cet environnement informatique qu'est le logiciel Geoplan-Geospace. Nous aurons beau faire des tentatives de rigueur dans une définition des mots comme "figure", "représentation", "dessin" etc., l'usage habituel de ces mots dans un sens peu précis se maintiendra naturellement longtemps dans des phrases comme

"on fait tourner la figure", "on a un cube sur l'écran", "le dessin varie", "la figure change" etc.

Nous pensons que, comme cela se rencontre dans des situations analogues, l'évolution naturelle de l'attitude des utilisateurs du logiciel est de commencer par

⁴ Peut être un jour pourrons nous disposer d'un "système" qui fournit des représentations à trois dimensions sous forme de "maquette" concrète ou plus vraisemblablement sous forme d'hologrammes (ce qui est moins concret).

un stade intuitif où les représentations, les objets, leurs valeurs se mélangent puis, et ce texte cherche à aider en cela, d'arriver à un stade assez rigoureux pour éventuellement retomber plus ou moins dans des abus ou une confusion apparente de langage dus à la paresse et aussi à la recherche d'une commodité de communication.