SOMMAIRE

Introduction

Le mot géométrie signifie " mesure de la terre ", elle est considérée comme l'une des branches les plus anciennes des mathématiques. Historiquement, il semble que la géométrie se développa dans l'ancienne Egypte pour des buts pratiques tels que la mesure des surfaces au sol et la résolution de problèmes architecturaux. Jusqu'au 18ème siècle, la géométrie fut la géométrie classique qui avait été développée et systématisée par les grecs, principalement par Euclide (3ème siècle avant J.-C.). Au cours du 19ème siècle sont développées d'autres géométries. Riemann en 1854 définit une géométrie exigeant que par un point extérieur à une droite on ne puisse mener aucune parallèle à cette droite. La géométrie sur la sphère, en considérant comme droites les grands cercles, constitue un modèle de géométrie plane de Riemann.

Quant à la trigonométrie sphérique qui traite de la résolution d'un triangle sur la surface d'une sphère à partir de trois de ses éléments (parmi les trois angles et les trois côtés) elle a précédé la trigonométrie plane. En effet son développement, qui date apparemment de 150 ans avant J.-C., est dû au postulat de la sphéricité des cieux et la découverte de celle de la Terre. Elle a pour tâche de déterminer les positions de points et les distances entre eux ainsi que les angles sur la sphère céleste ou sur la surface de la Terre. Son fondateur est supposé être Hipparque. Ménélaüs, astronome à Rome au premier siècle de notre ère, rédige un traité où il étudie les propriété des triangles sphériques. Ptolémée (85-165) dans l'*Almageste* étend les résultats d'Hipparque et de Ménélaüs et fonde son astronomie sur les théorèmes de trigonométrie qu'il a énoncés et démontrés. Ce livre devait être la référence des astronomes jusqu'à l'abandon de la conception géocentrique de l'Univers. C’est Albattani (858-929) qui a trouvé et démontré la loi des cosinus pour les côtés (que nous démontrerons), qui est considérée comme la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique. Il faudra pourtant attendre le XVème siècle pour que le premier traité sur la trigonométrie indépendant de l’astronomie soit rédigé par Régiomontanus (1436-1476).

Les applications de la trigonométrie sphérique sont très diverses. Mais les domaines d'applications les plus importants sont la navigation et l'astronomie. Enfin en géométrie pure elle a été utilisée récemment dans plusieurs recherches de la géométrie riemannienne.

Le travail qui suit porte donc sur la trigonométrie sphérique. On commencera par l'explication de quelques points de géométrie sphérique, comme par exemple la définition du plus court chemin, de la droite, et du triangle sur la sphère . La seconde partie consistera à énoncer et démontrer les formules de la trigonométrie sphérique. On effectuera ensuite une comparaison entre le triangle sphérique et celui de la géométrie euclidienne, ainsi qu'un rapprochement de certaines formules du triangle sphérique et du triangle euclidien. Enfin nous étudierons des applications directes de la trigonométrie sphérique à l'astronomie et à la navigation .

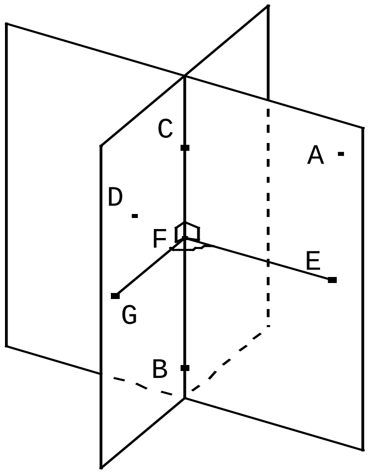


figure 1

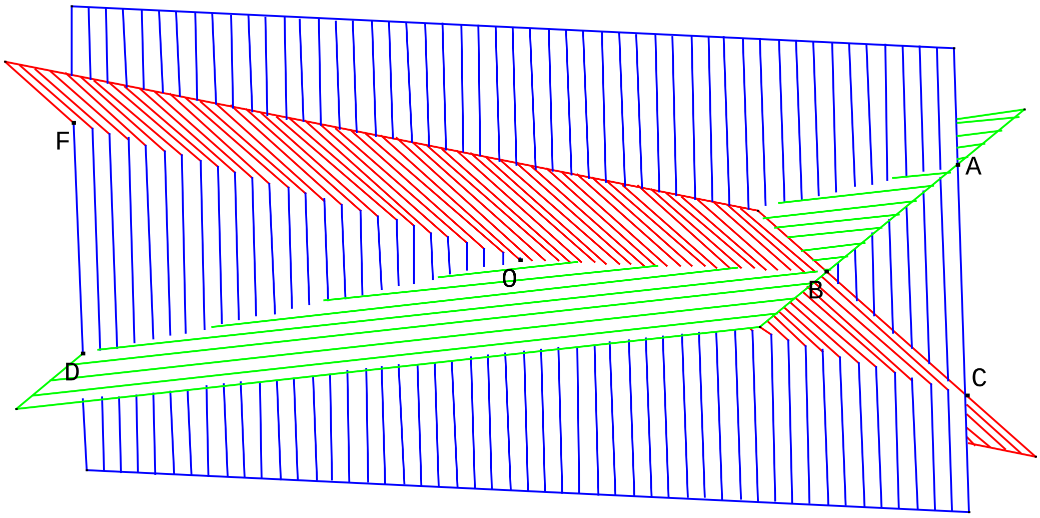


figure 2

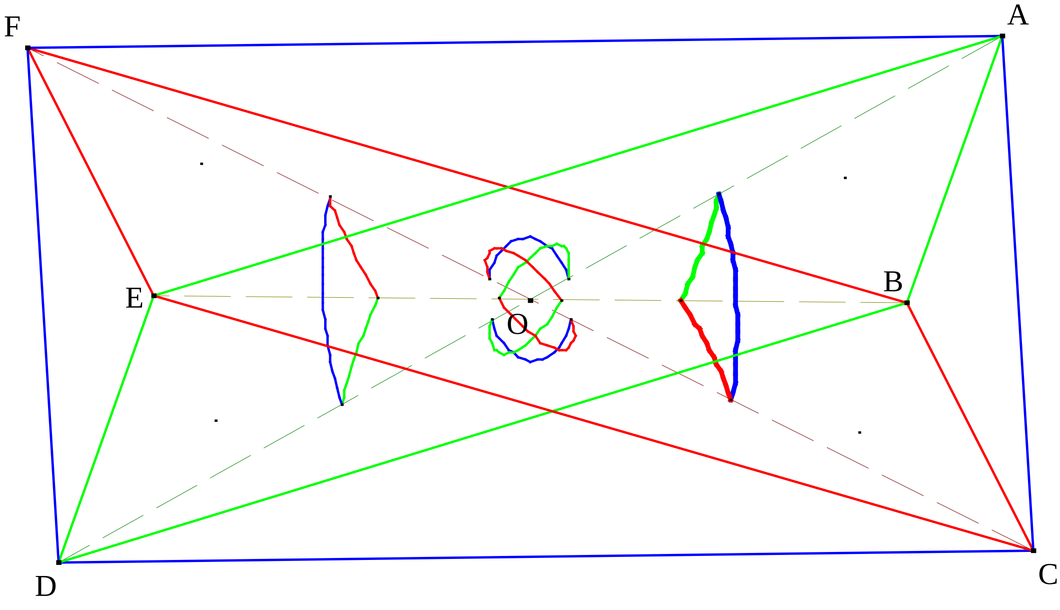


figure 3

I Géométrie sphérique

La géométrie sur la sphère est un exemple de géométrie non euclidienne, en effet nous verrons qu'elle repose sur des axiomes et des éléments tout à fait différents. Dans un premier temps, nous étudierons l'influence de la mesure des angles dans l'espace sur le plus court chemin entre deux points sur la sphère. Nous verrons ensuite que cette notion, nous permet de légitimer les bases de la géométrie sphérique.

I.1 Angles dièdres et trièdres

Sur le plan deux droites non parallèles définissent quatre angles plans, de manière analogue dans l'espace deux plans non parallèles définissent **quatre angles dièdres** (cf fig.1). (on sait que l'intersection de deux plans non parallèles est une droite)

<u>Définitions</u>: Soient P_1 et P_2 deux plans , A,B,C,D quatre points distincts de l'espace tels que:

_ $P_1 \cap P_2$= (BC)

_ A$\in$ P_1\(BC) et D$\in$ P_2\(BC)

Alors on note A-BC-D **l'angle dièdre** indiqué sur la figure 1. Les demi-plans de bord commun (BC) contenant respectivement A et D ($\left\{M \in \mathbb{R}^3 / BM = \lambda BC + \mu BA \ : \ 0 \le \mu\right\}$ et $\left\{M \in \mathbb{R}^3 / BM = \lambda BC + \mu BD \ : \ 0 \le \mu\right\}$) sont **les faces** de A-BC-D, et (BC) est **l'arête** de cet angle dièdre. L'angle plan formé par les demi-droites sections des faces avec un plan perpendiculaire à l'arête est appelé **angle plan** de l'angle dièdre. **La mesure de l'angle dièdre** sera la mesure de son angle plan (on notera l'angle (non orienté) (EFG) par $\prec$EFG): mesure(A-BC-D):= mesure($\prec$EFG)

Par ailleurs, trois plans s'intersectant en un unique point (cf fig.2) définissent **huit angles trièdres:** par exemple sur la figure 3 les plans (OAB), (OAC), (OBC) définissent huit angles trièdres symétriques deux à deux: O-ABC et O-DEF, O-ACE et O-BFD, O-ABF et O-CED, O-BCD et O-EFA .

<u>Définitions</u>: Soient P_1, P_2, P_3 trois plans non-parallèles deux-à-deux, O,A,B,C quatre points distincts tels que:

_ $P_1 \cap P_2 \cap P_3$=O

_ $P_1 \cap P_2$=(OA)

_ $P_1 \cap P_2$=(OB)

_ $P_1 \cap P_2$=(OC)

Alors O-ABC est un **angle trièdre**, O est appelé **sommet** de O-ABC, les secteurs plans compris entre les demi-droites [OA), [OB) et [OC) prises deux-à-deux ($\left\{M \in \mathbb{R}^3 / OM = \lambda OA + \mu OB \ : \ 0 \le \lambda \text{ et } 0 \le \mu\right\}$,$\left\{M \in \mathbb{R}^3 / OM = \lambda OB + \mu OC \ : \ 0 \le \lambda \text{ et } 0 \le \mu\right\}$ $\left\{M \in \mathbb{R}^3 / OM = \lambda OA + \mu OC \ : \ 0 \le \lambda \text{ et } 0 \le \mu\right\}$) sont **les faces** de cet angle trièdre. Les faces prises deux-à-deux forment trois angles dièdres (ici B-OA-C, A-OB-C et A-OC-B) dont les arêtes sont **les arêtes de l'angle trièdre** (ici [OA), [OB), [OC)). Les **angles faciaux** sont les angles plans non orientés $\prec$AOB, $\prec$AOC, $\prec$BOC (tracés en traits épais sur la figure 3 respectivement en vert, bleu et rouge).

<u>Remarque:</u> Définis par trois plans non parallèles deux à deux, les angles d'un trièdre appartiennent à l'intervalle $]0;\pi[$.

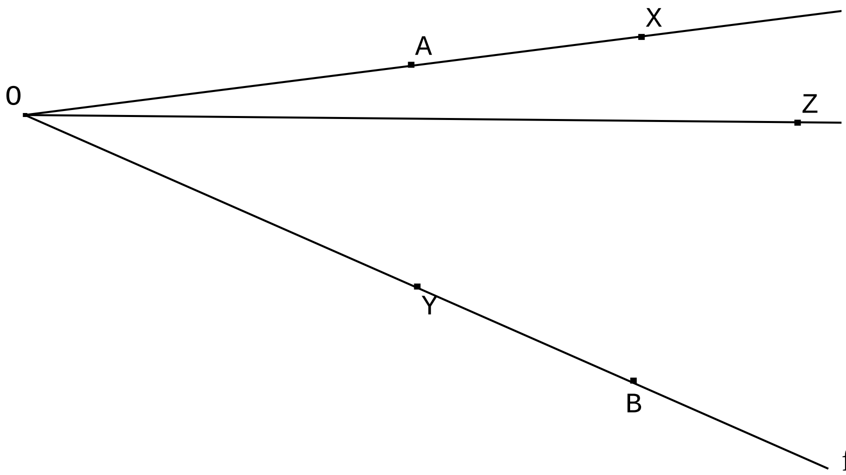


figure 4

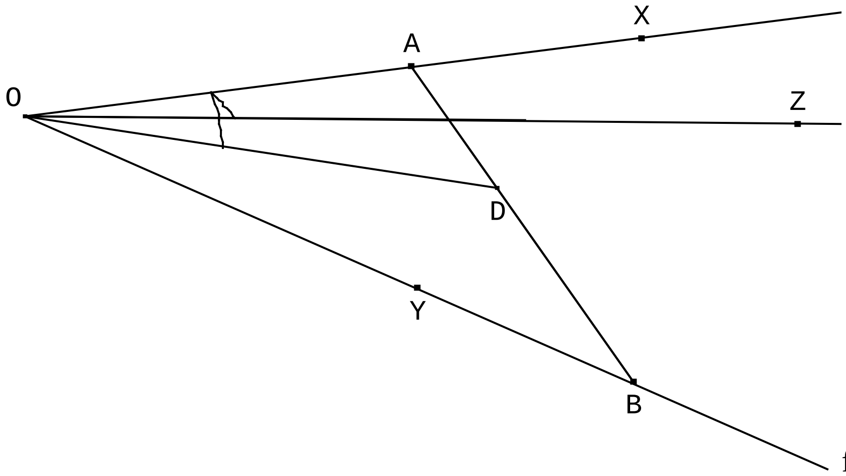


figure 5

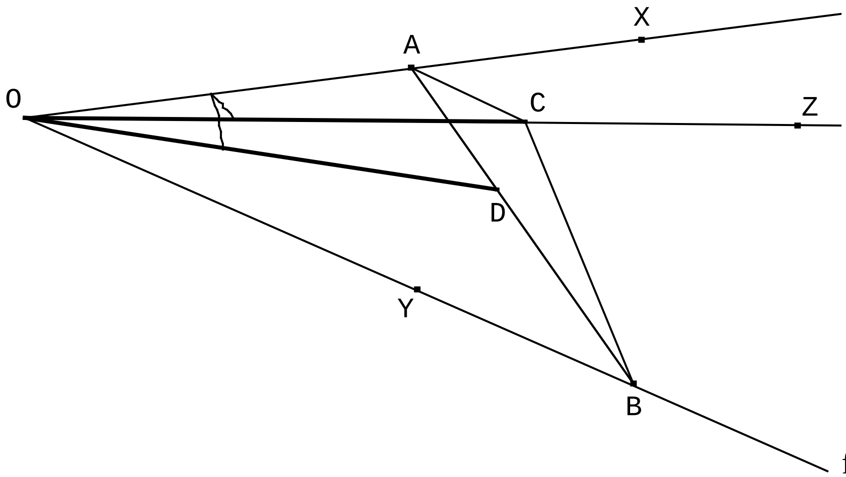


figure 6

Propriété: la somme des mesures de deux angles faciaux d'un angle trièdre (non aplati) est strictement supérieure à la mesure du troisième angle facial.

Démonstration:

Considérons le trièdre O-XYZ (cf. fig.4). Deux cas sont possibles:

_ les trois angles faciaux sont égaux, alors la propriété est vérifiée

_ les trois angles faciaux ne sont pas égaux

Dans ce deuxième cas supposons $\prec$ XOY le plus grand des angles faciaux (si il y en a deux on choisit arbitrairement l'un d'eux), alors l'unique cas à discuter reste la comparaison de $\prec$ XOZ + $\prec$ ZOY avec $\prec$ XOY.

Soient A$\in$ [OX) et B$\in$ [OY), $A \neq O, B \neq O$, nous plaçons D tel que D$\in$ [AB] et $\prec$ AOD = $\prec$ XOZ (c'est possible car $\prec XOY > \prec XOZ$) (cf. fig.5), puis C tel que C$\in$ [OZ) et OC = OD.(cf fig. 6)

Alors, dans le triangle ABC on a: _ AC + CB > AB (car C$\notin$ [AB])

_ AB = AD + DB (car D$\in$ [AB])

d'où AC + CB > AD + DB

Par ailleurs les triangles AOC et AOD sont isométriques par construction (ils ont deux côtés et l'angle intérieur égaux), donc AD = AC ($= \sqrt{OA^2 + OD^2 - 2 < OA, OD >}$)

d'où AC + CB > AC + DB $\Rightarrow$ CB > DB (*)

Or dans les triangles ODB et OCB, les côtés contenant O sont égaux, alors l'inégalité (*) sur les côtés opposés à O entraîne $\prec$ COB > $\prec$ DOB

(car $\prec$ DOB= arccos$\left(\dfrac{OD^2 + OB^2 - DB^2}{2OD \times OB}\right)$ et $\prec$ COB=arccos$\left(\dfrac{OD^2 + OB^2 - CB^2}{2OD \times OB}\right)$ et la fonction arccos est décroisante sur [-1;1])

Par construction on a $\prec$ AOC = $\prec$ AOD, donc

$\prec$ AOC + $\prec$ COB > $\prec$ AOD + $\prec$ DOB = $\prec$ AOB

$\Rightarrow \prec XOZ + \prec ZOY > \prec XOY$ CQFD

Remarque: si le trièdre est "aplati", c'est-à-dire si X,Y et Z sont coplanaires on peut avoir l'égalité.

Remarque: Nous aborderons plus tard une autre façon de démontrer ce résultat (grâce aux formules de la trigonométrie sphérique), cependant ne nécessitant que l'utilisation d'arguments de géométrie élémentaire, cette démonstration permet de démontrer a priori le résultat sur le plus court chemin sur la sphère.

I.2 Le plus court chemin sur la sphère

Deux points étant placés sur la sphère, il est possible de les joindre par un segment de droite, ce qui représente le plus court chemin entre ces deux points dans $\mathbb{R}^3$. Cependant ce segment n'est pas sur la sphère, il n'a donc aucun sens à la surface de le la sphère. C'est pourquoi il parait indispensable avant toute chose de définir ce qu'est le plus court chemin entre deux points sur la sphère. Dans la suite nous appellerons S^2 la sphère de centre O et de rayon 1 de $\mathbb{R}^3$.

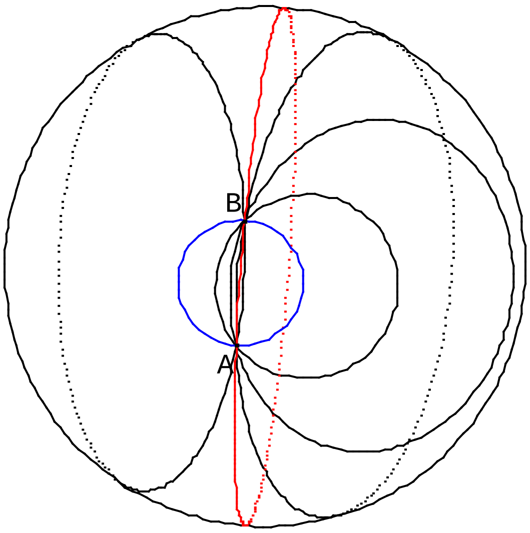


figure 7

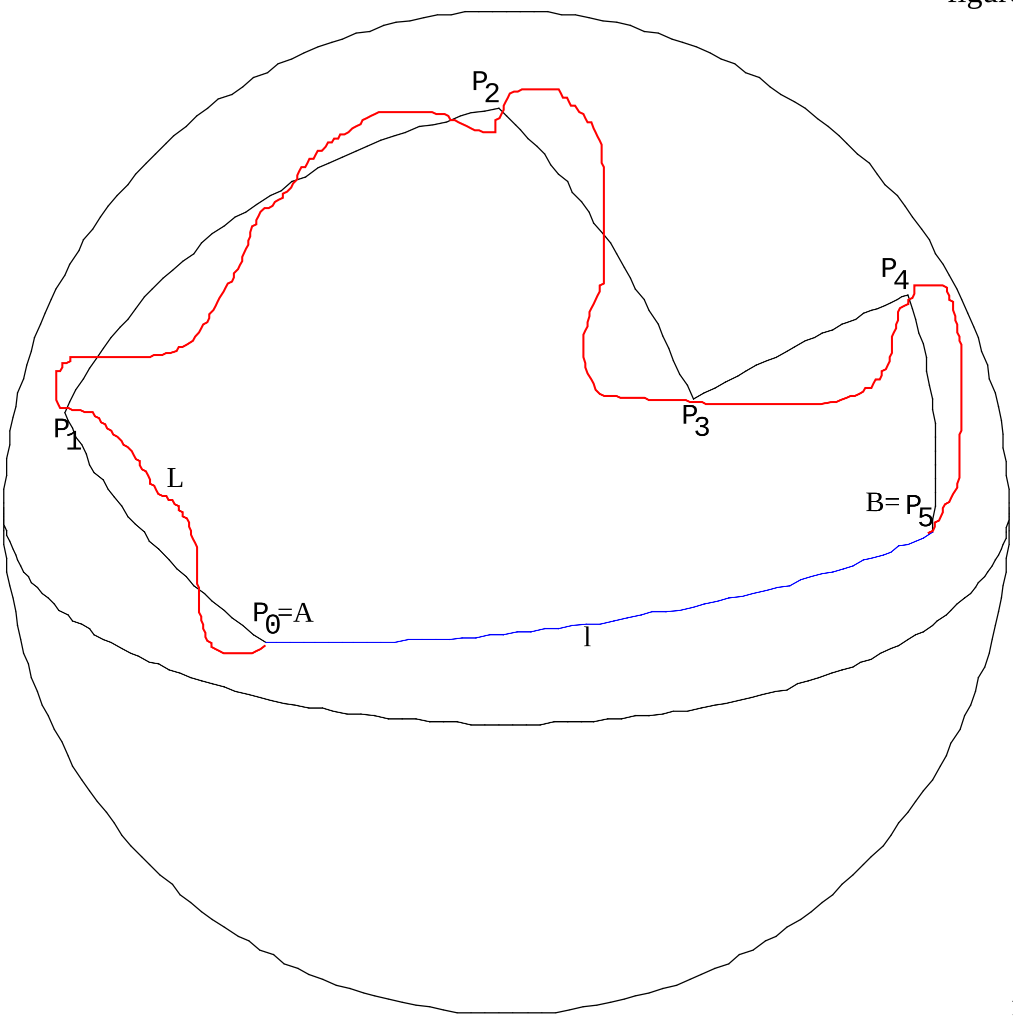


figure 8

Légende:

_ en bleu l, l'arc de grand cercle joignant P_0=A et P_5=B
_ en rouge L, la courbe joignant A et B
_ en noir la "ligne sphérique brisée" $P_0P_1P_2P_3,P_4,P_5$

<u>Définitions</u>: soient $A\in S^2$ et $B\in S^2$, A et B sont dits **antipodaux** s'ils sont placés sur un même diamètre de S^2 .Si A et B ne sont pas antipodaux les intersections des plans contenant A et B avec S^2 forment un faisceau de cercles (cf fig 7), le cercle intersection du plan (OAB) avec S^2 est appelé **grand cercle** (en rouge), les autres sont des **petits cercles**. Par **arc de grand cercle joignant A et B**, nous entendrons l'arc mineur (i.e. le plus court des deux) du grand cercle contenant A et B. Si A et B sont antipodaux le faisceau de cercles est constitué d'une infinité de grands cercles, et les arcs de grand cercle joignant A et B sont tous de longueur π .

Théorème: la courbe rectifiable la plus courte sur S^2, reliant deux points $A\in S^2$ et $B\in S^2$ non antipodaux est l'arc de grand cercle joignant A et B.

Démonstration: (par l'absurde)

Soient $A\in S^2$ et $B\in S^2$ non antipodaux, l l'arc de grand cercle joignant A et B et L une courbe rectifiable sur S^2 joignant A et B. Supposons L plus courte que l : long(L)< long(l) Choisissons $P_0=A$, P_1,P_2, ... P_{n-1},P_n, $P_{n+1}=B$ des points de L formant une subdivision de L (cf fig 8 pour n=4), définissons alors, en notant P_iP_{i+1} la norme euclidienne du vecteur P_iP_{i+1} :

$$diam(P_0P_1...P_{n+1}) = \max_{i=0...n}(P_iP_{i+1})$$

Alors on a: $$\underset{diam(P_0P_1...P_{n+1})\to 0}{Lim} P_0P_1 + P_1P_2 + \cdots + P_nP_{n+1} = long(L)$$

et: $$P_0P_1 + P_1P_2 + \cdots + P_nP_{n+1} < long(L) \quad \forall n\in \mathbb{N}$$

en notant $C_{i,k}$ l'arc de grand cercle joignant P_i et P_k, on a:

$$P_iP_{i+1} = 2\sin\frac{long(C_{i,i+1})}{2}$$

donc: $long(C_{i,i+1}) = 2\arcsin\frac{P_iP_{i+1}}{2} = P_iP_{i+1} + O\left(\left(P_iP_{i+1}\right)^3\right)$ quand $diam(P_0P_1...P_{n+1}) \to 0$

Ainsi: $P_0P_1 + \cdots + P_nP_{n+1} = long(C_{0,1}) + O\left(\left(P_0P_1\right)^3\right) + \cdots + long(C_{n,n+1}) + O\left(\left(P_nP_{n+1}\right)^3\right)$

$$\left(P_0P_1\right)^3 + \cdots + \left(P_nP_{n+1}\right)^3 \le \left(diam(P_0P_1...P_{n+1})\right)^2\left(P_0P_1 + \cdots + P_nP_{n+1}\right) \le \left(diam(P_0P_1...P_{n+1})\right)^2 long(L)$$

et enfin: $P_0P_1 + \cdots + P_nP_{n+1} = long(C_{0,1}) + \cdots + long(C_{n,n+1}) + O\left(\left(diam(P_0P_1...P_{n+1})\right)^2\right)$

Soit $l_n^{(0)} = \bigcup_{i=0}^{n} C_{i,i+1}$ une "ligne sphérique brisée": $long(l_n^{(0)}) = \sum_{i=0}^{n} long(C_{i,i+1})$

$$P_0P_1 + \cdots + P_nP_{n+1} = long(l_n^{(0)}) + O\left(\left(diam(P_0P_1...P_{n+1})\right)^2\right)$$

Donc lorsque $diam(P_0P_1...P_{n+1})$ diminue (n augmente) la longueur de $l_n^{(0)}$ se rapproche de celle de L, en particulier: $\exists$ P_0,P_1,P_2, ... P_{N-1},P_N, P_{N+1} tel que long($l_N^{(0)}$) <long(l)

soit $l_N^{(1)} = C_{0,2} \cup (\bigcup_{i=2}^{N} C_{i,i+1})$ correspondant à $l_N^{(0)}$ dans laquelle on remplace $C_{0,1}\cup C_{1,2}$ par $C_{0,2}$

Montrons que $long(l_N^{(0)}) \ge long(l_N^{(1)})$:

Les longueurs des deux lignes brisées diffèrent uniquement au niveau des arcs $C_{0,1}$, $C_{1,2}$ et $C_{0,2}$ il suffit donc de montrer que:

$$long(C_{0,1}) + long(C_{1,2}) \ge long(C_{0,2})$$

Considérons le trièdre O-$P_0P_1P_2$, S^2 étant de rayon 1 les longueurs des arcs $C_{0,1}$, $C_{1,2}$ et $C_{0,2}$ sont respectivement les mesures des angles faciaux $\prec P_0OP_1$, $\prec P_1OP_2$ et $\prec P_0OP_2$
La propriété précédente appliquée à ce trièdre donne : $\prec P_0OP_1 + \prec P_1OP_2 \geq \prec P_0OP_2$

$\Rightarrow$ long($C_{0,1}$) + long($C_{1,2}$) $\geq$ long($C_{0,2}$)

$\Rightarrow$ $long(l_N^{(0)}) \geq long(l_N^{(1)})$

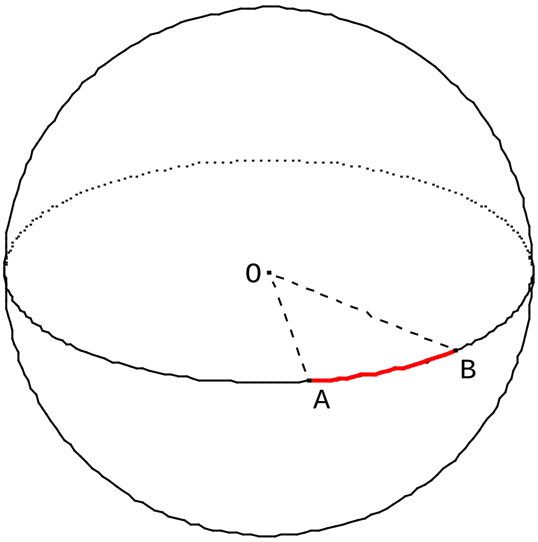


figure 9

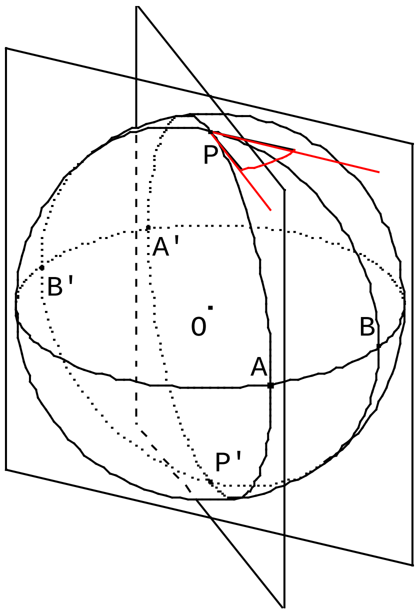


figure 10

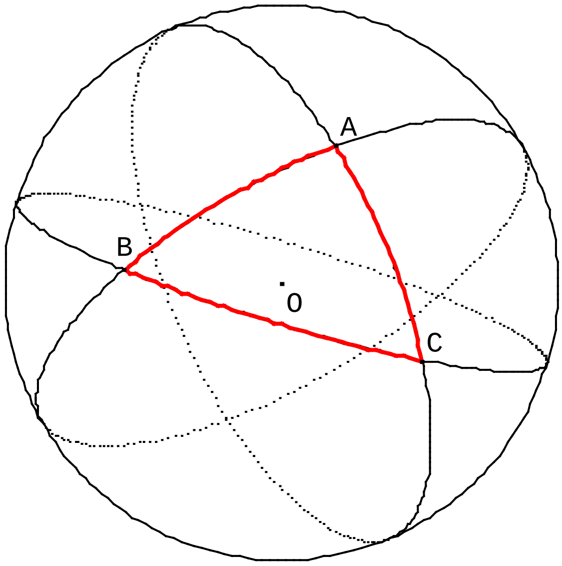


figure 11

Or: long($l_N^{(0)}$) <long(l) $\Rightarrow$ $long(l_N^{(1)}) < long(l\ )$

En itérant ce processus(enlever un point) N fois,et en notant: $l_N^{(k)} = C_{0,k+1} \bigcup_{i=k+1}^{N} C_{i,i+1}$ pour $0 \le k \le N$, on obtient: $\forall k < N \quad long(l_N^{(k)}) < long(l\ )$ et $long(l_N^{(N)}) < long(l\ )$
or $l_N^{(N)} = C_{0,N+1} = l$ d'où la contradiction.

On a donc long(L)$\geq$long(l) et comme cette démonstration est valable pour toute courbe L de la sphère, on a montré qu'il n'existe pas de courbe plus courte que l allant de A à B.

Pour montrer que c'est l'unique plus courte, supposons par l'absurde qu'il existe L' telle que long(L')=long(l) et l$\neq$L' alors: $\exists C \in S^2 / C \in L'$ et $C \notin l$. En notant L_1 la partie de L allant de A à C et L_2 la partie de L allant de C à B, on a: long(L_1) $\geq$ long(AC) et long(L_2) $\geq$ long(CB) et d'après la propriété précédente sur les mesures de angles faciaux d'un trièdre (ici non aplati): long(AC)+long(CB) > long(AB), donc: long(L')=long(L_1)+long(L_2)>long(AB) ce qui est en contradiction avec l'hypothèse sur L'.

CQFD

Remarque: toutes ces notions sont transposables à une sphère de rayon R quelconque par homothétie de centre O et de rapport R. Ainsi quel que soit le rayon de la sphère, le plus court chemin entre deux points A et B de celle-ci sera l'arc mineur du grand cercle contenant A et B.

I.3 Segments, droites, points, distances et angles sphériques

Maintenant que nous connaissons le plus court chemin entre deux points sur la sphère, nous pouvons légitimer l'existence des éléments de la géométrie sphériques:

_ le **segment sur la sphère** sera déterminé par deux points non-antipodaux, A et B, représenté par l'arc mineur du grand cercle contenant ces deux points (cf figure 9) et noté [AB] (comme dans la géométrie euclidienne le segment reste le plus court chemin pour aller d'un point à un autre).

_ par extrapolation, la **droite sphérique** sera déterminée par deux points non-antipodaux, A et B, représentée par le grand cercle contenant ces deux points, et notée (AB) (pour qu'une unique droite passe par deux points fixés il faut éliminer les points antipodaux).

_ ainsi un **point sphérique** sera un couple de points appartenant à la sphère et antipodaux.

Remarque: la principale raison pour laquelle la géométrie sphérique n'est pas euclidienne est qu'elle ne vérifie pas l'axiome des parallèles, en effet il n'existe pas deux droites sphériques parallèles (i.e. elles s'intersectent toujours en un point sphérique)

Une fois ces éléments définis nous pouvons définir les notions de distances et d'angles sphériques: _la distance entre deux points A et B d'une sphère sera la longueur de l'arc mineur déterminé par A et B, notée AB. En effet .. : $S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ définit bien une distance:

AB=0⇔A=B, AB=BA, AB$\leq$AC+CB (d'après la propriété sur les angles faciaux d'un trièdre).

_l'angle déterminé par deux droites sphériques sera l'angle dièdre formé par les deux plans contenant les grands cercles correspondant aux droites sphériques, noté $\prec APB$ (cf fig 10 en rouge l'angle entre les droites ((P,P'),(A,A')) et ((P,P'),(B,B'))).(En effet nous savons qu'en tout point de la sphère le plan tangent en P est orthogonal au rayon OP.)

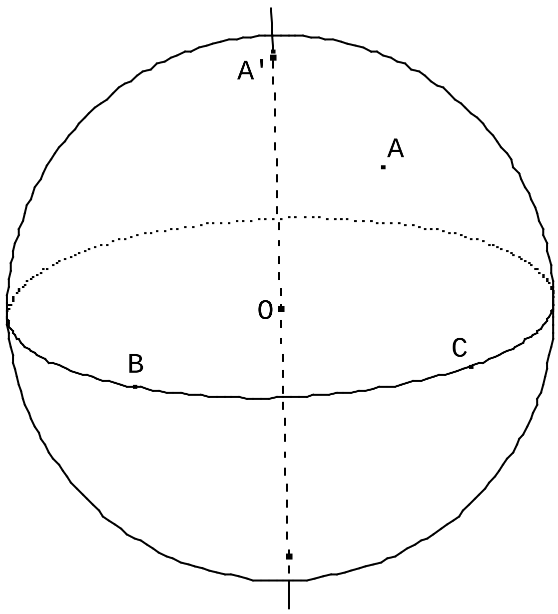


figure 12

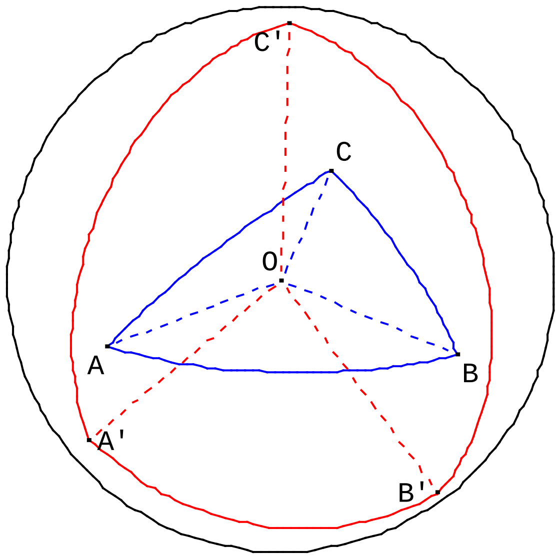


figure 13

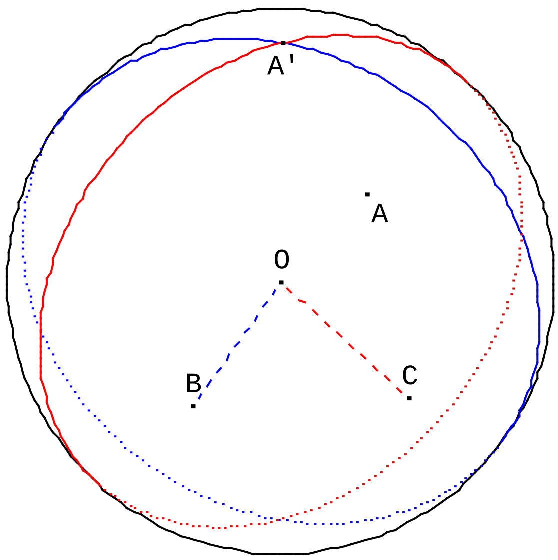


figure 14

I.4 Triangles sphériques

I.4.1 Définition

Maintenant que nous connaissons les bases de la géométrie sphérique, il parait légitime de définir le **triangle sphérique** (aussi appelé triangle d'Euler) par trois points A, B et C "non alignés" (i.e. n'étant pas sur la même droite sphérique). Le triangle sphérique sera représenté par les trois segments sur la sphère déterminés par les couples (A,B), (B,C) et (A,C) (cf. figure 11). Nous pouvons aussi, sans ambiguïté avec la définition précédente, définir le triangle sphérique par la donnée de trois vecteurs libres et unitaires de $\mathbb{R}^3$ (sur la figure 11 les trois vecteurs seraient OA, OB et OC). On notera le triangle sphérique ainsi défini par ABC.

<u>Remarque</u>: la définition du segment sur la sphère implique donc que les côtés d'un triangle sphérique sont de longueur strictement inférieure à πR (où R est le rayon de la sphère). De plus comme les mesures des angles dièdres sont déterminées par des angles non-orientés, les angles du triangles seront compris entre 0 et π.

I.4.2 Triangles polaires ou supplémentaires

A chaque triangle sphérique correspond un second triangle que l'on nomme triangle polaire ou supplémentaire. Il existe deux méthodes de construction (qui sont aussi les définitions) de ce dernier. Soit ABC un triangle sphérique quelconque:

<u>Définitions 1</u>: à un grand cercle on fait correspondre deux **pôles** qui sont les intersections de la sphère avec la droite perpendiculaire au plan du grand cercle et passant par O. On note A' le pôle du grand cercle passant par B et C qui se situe dans le même hémisphère que le point A (cf figure 12). De même on définit B' pôle du grand cercle passant par A et C se situant dans le même hémisphère que B , et C' relatif à A et B.
A'B'C' est **le triangle polaire** de ABC (cf figure 13).
<u>Définition 2</u>: On construit les trois grands cercles ayant pour pôles A,B, et C. Le point A' est définit comme l'intersection des deux grands cercles ayant pour pôles B et C , A' se situant dans le même hémisphère que A(cf figure 14). Par permutation circulaire (A→B→C→A) on obtient B' et C'.

Vérifions que ces deux définitions concordent bien: partons de la définition 2 et montrons que A' est bien le pôle du grand cercle passant par A et B.
On a: A' est sur le grand cercle de pôle B $\Rightarrow$ (OA')$\perp$(OB)
A' est sur le grand cercle de pôle C $\Rightarrow$ (OA')$\perp$(OC)
Mais ces deux relations d'orthogonalité peuvent être interprétées comme suit:
_ A' est un pôle d'un grand cercle passant par B
_ A' est un pôle d'un grand cercle passant par C
donc A' est un pôle du grand cercle passant par B et C
De plus A' est dans le même hémisphère que A ; les deux définitions concordent bien.

La traduction de ces définitions en termes d'angles donne 9 relations :

$\langle OA;OA'\rangle > 0$	i.e. A' est dans le même hémisphère que A
$\langle OB; OB'\rangle > 0$	i.e. B' est dans le même hémisphère que B
$\langle OC; OC'\rangle > 0$	i.e. C' est dans le même hémisphère que C

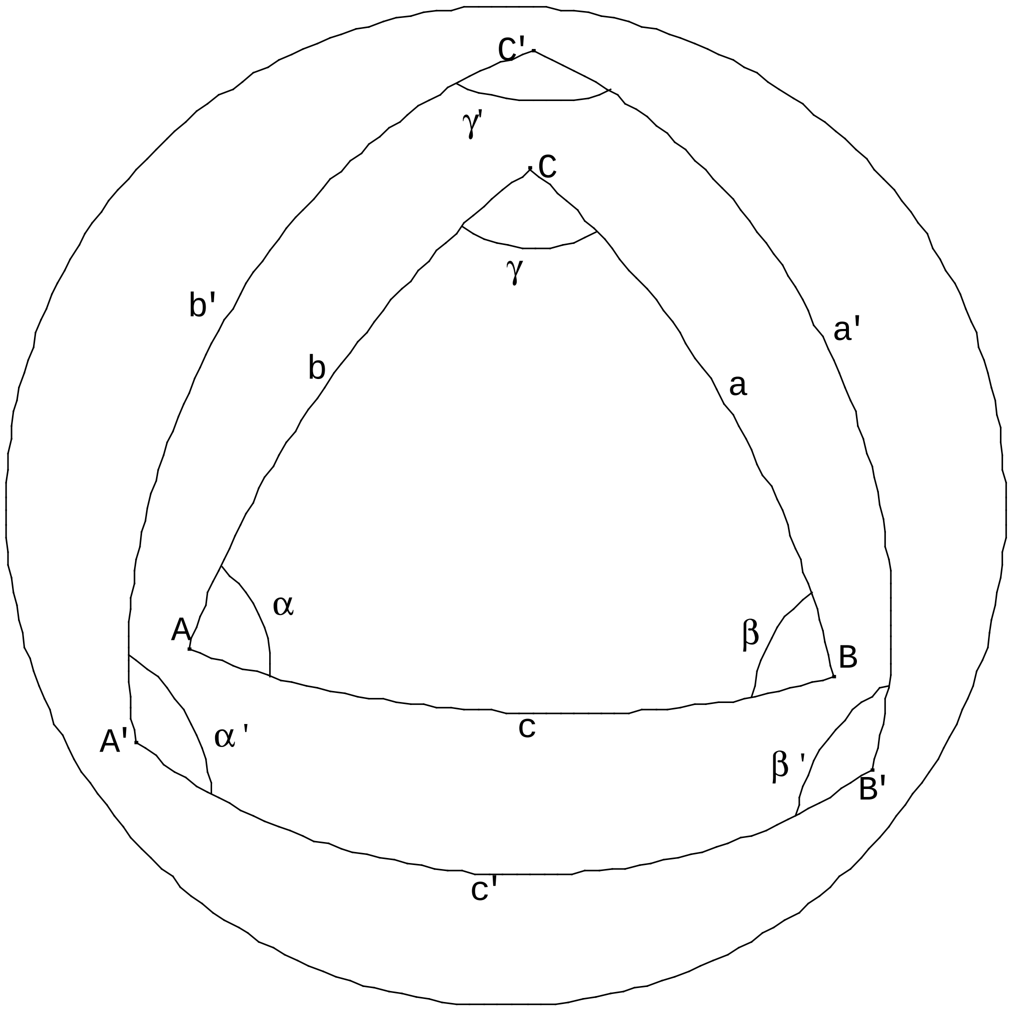


figure 15

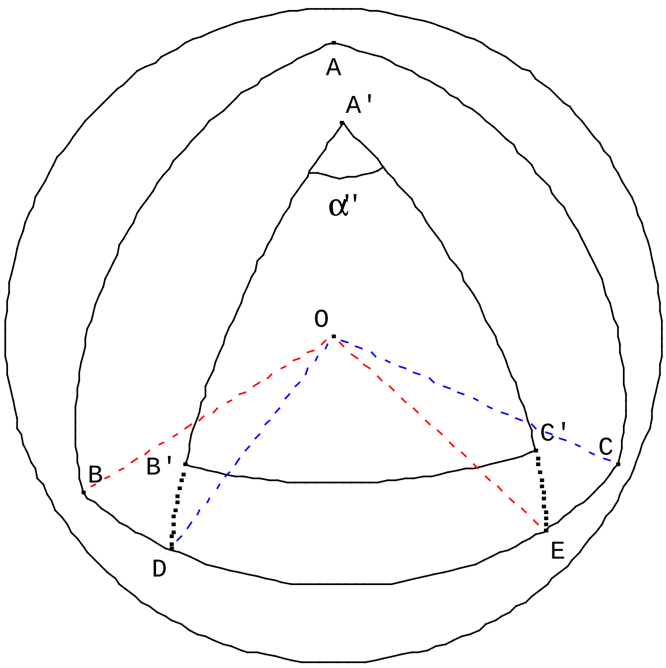


figure 16

Remarque: le cas où $\langle OA;OA'\rangle =0$ est exclu car on aurait alors $(OA')\perp(OA)$ c' est à dire A' est un pôle d'un grand cercle passant par A et donc A, B, et C seraient tous sur un même grand cercle, ce qui est contradictoire avec la définition d'un triangle sphérique.

$\langle OB;OA'\rangle=\langle OC;OA'\rangle=0$ i.e. A' est un pôle du grand cercle passant par B et C
$\langle OB';OA\rangle=\langle OC;OB'\rangle=0$ i.e. B' est un pôle du grand cercle passant par A et C
$\langle OA;OC'\rangle=\langle OB;OC'\rangle=0$ i.e. C' est un pôle du grand cercle passant par B et A

Les points A', B', et C' définissent bien un triangle sphérique car s'ils se trouvaient sur un même grand cercle, les vecteurs OA', OB' et OC' seraient coplanaires donc linéairement dépendants:

par exemple $OA'=\lambda OB'+\mu OC'$ $\Rightarrow \langle OA';OA\rangle=\lambda\langle OB';OA\rangle+\mu\langle OC';OA\rangle$
$\Rightarrow \langle OA';OA\rangle=0$ ce qui est exclu.

Propriétés: Soit ABC un triangle sphérique sur S^2, on note a, b, c les côtés opposés respectivement à A, B, C, puis α, β, γ les angles opposés à a, b, c de même on note a', b', c', α', β', γ' les éléments de son triangle polaire A'B'C' (cf figure 15).

1- On a les relations :

$$a'+\alpha = a+\alpha' = \pi$$

$$b'+\beta = b+\beta' = \pi$$

$$c'+\gamma = c+\gamma' = \pi$$

c'est à dire les angles des sommets de l'un des deux triangles sont respectivement les supplémentaires des côtés de l'autre.

2- De plus si A'B'C' est le triangle polaire de ABC alors le triangle polaire de A'B'C' n'est autre que ABC. Autrement dit l'application qui à un triangle fait correspondre son triangle polaire est involutive.

Démonstration:

2- Si on regarde les 9 relations qui définissent le triangle polaire d'un triangle on remarque que celles-ci sont symétriques. Le caractère involutif de l'application qui à un triangle fait correspondre son triangle polaire est donc évident : le triangle polaire de A'B'C' est bien le triangle ABC .

1- Cette application étant une involution , des six relations que nous avons à démontrer trois découlent des trois autres par dualité involutive. Nous allons donc prouver que $a+\alpha'=\pi$ ($b+\beta'=\pi$ et $c+\gamma' =\pi$ s'obtiennent par permutation circulaire).

On note D le point d'intersection du grand cercle passant par A' et B' et de celui passant par B et C , on note E le point d'intersection du grand cercle passant par A' et C' et de celui passant par B et C (cf fig.16). On a alors, en notant DE la longueur du segment sur la sphère allant de D à E:

$DE =\alpha'$ car A' est le pôle du grand cercle passant par B et C donc par D et E(le plan (ODE) est perpendiculaire à la droite (OA')). Ainsi $BC+DE=a+\alpha'$.

Or $BC+DE=BE+DC$ et D est sur le grand cercle passant par A' et B' qui a pour pôle C donc la mesure de DC est $\pi/2$.

De même E est sur le grand cercle passant par A' et C' qui a pour pôle B donc la mesure de BE est aussi $\pi/2$.

On obtient donc $a+\alpha'=BE+DC =\pi$. CQFD

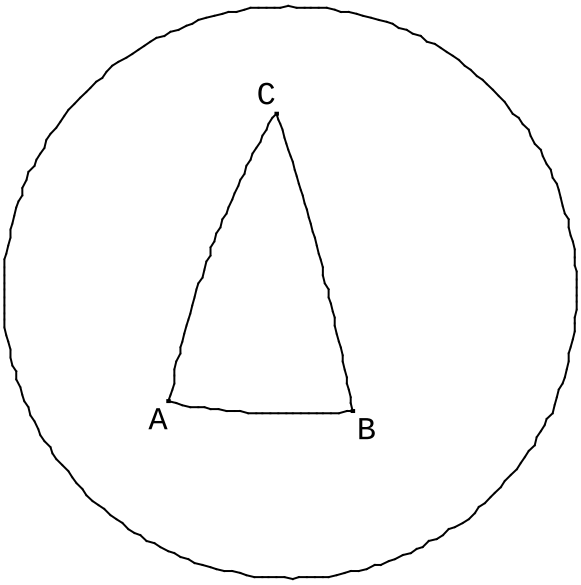


figure 17

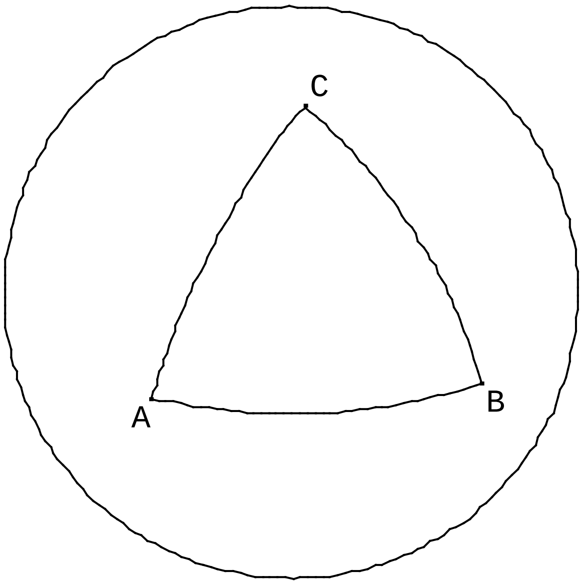


figure 18

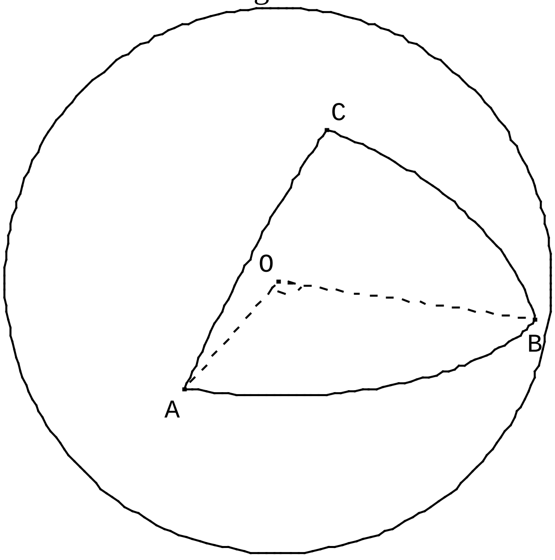


figure 19

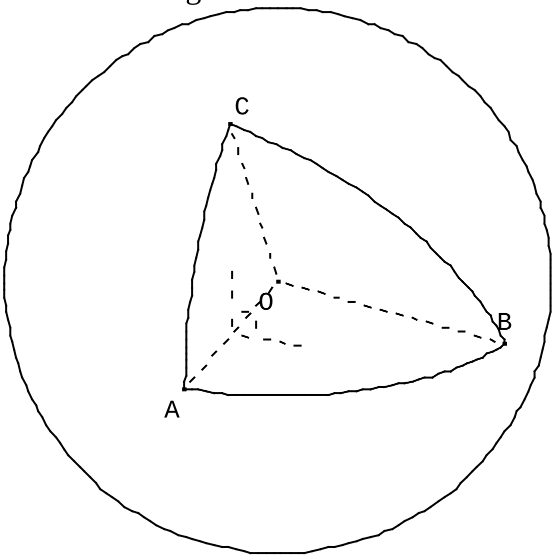


figure 20

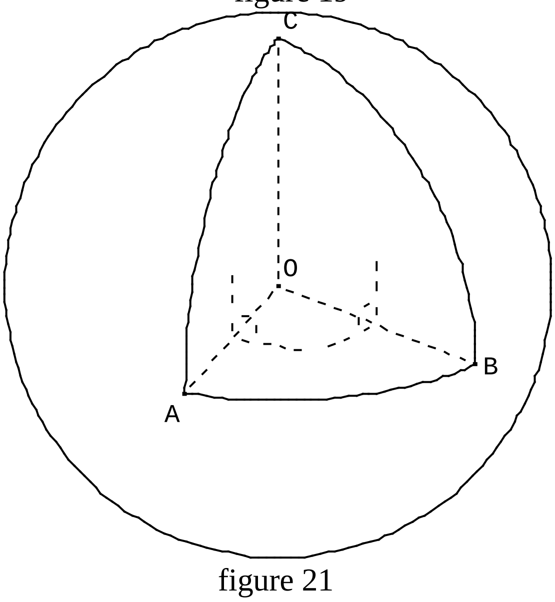


figure 21

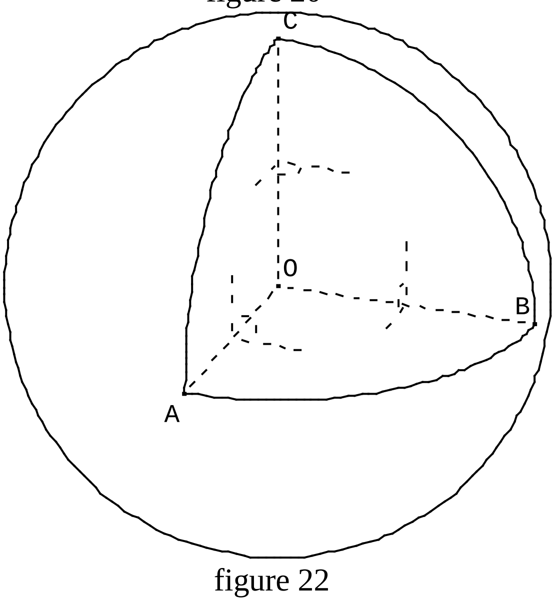


figure 22

Remarques: Toute proposition sur les angles et les côtés d'un triangle conduit à une proposition duale sur les côtés et les angles du triangle polaire .

Un triangle coïncide avec son triangle polaire si ses côtés et angles ont pour valeur $\pi/2$ (i.e. c'est un triangle trirectangle). En effet un point est déjà le pôle du grand cercle passant par les deux autres (ce situant dans le même hémisphère).

I.4.3 Autres triangles particuliers.

Définitions: Si deux côtes d'un triangle sphérique sont égaux alors le triangle est dit **isocèle** (cf figure 17). Un triangle sphérique est **équilatéral** si ses trois côtés sont égaux (cf figure18).

Définition: Un triangle sphérique est dit **rectilatère ou quadrantal** si l'un de ses côtés a pour longueur $\pi/2$ (cf figure 19).

Définitions:

1-Un triangle sphérique est dit **rectangle** lorsqu'il possède un angle droit (cf figure 20). Le côté opposé à cet angle droit est appelé **l'hypoténuse.**

2-Un triangle sphérique est dit **birectangle** lorsqu'il possède deux angles droits (cf figure 21).

3-Un triangle sphérique est dit **trirectangle** lorsqu'il possède trois angles droits (cf figure 22).

Remarques: Le triangle polaire d'un triangle rectilatère est évidemment rectangle et réciproquement. Dans un triangle rectangle les théorèmes que nous allons voir sur les triangles sphériques quelconques se simplifient, on obtient alors les règles de Napier.

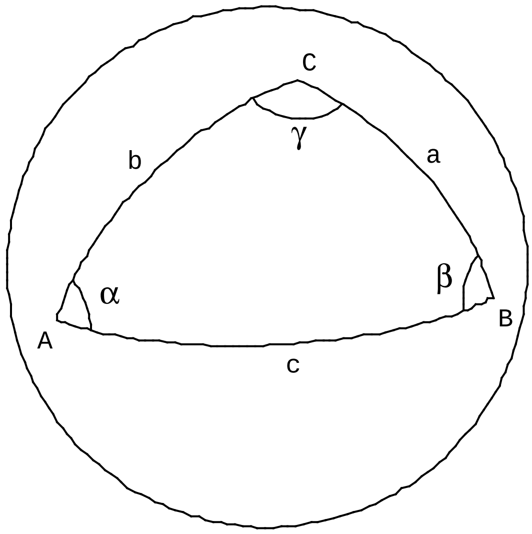


figure 23

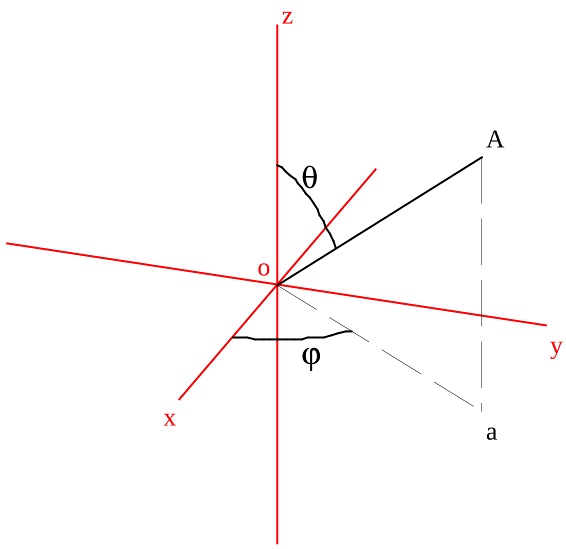


figure 24

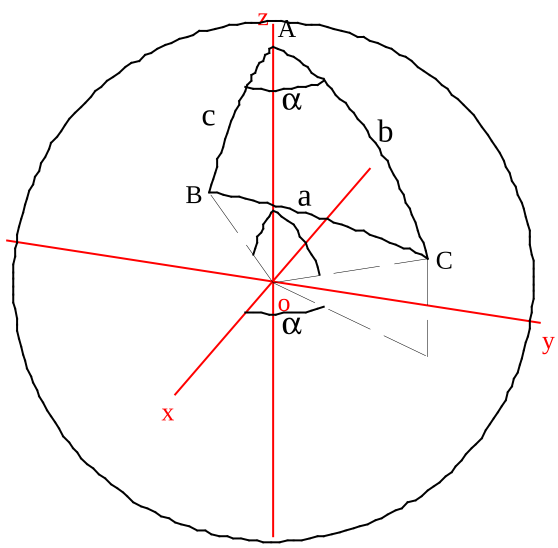


figure 25

II Trigonométrie sphérique

II.1 Formules fondamentales

Nous travaillerons désormais en considérant un triangle sphérique quelconque ABC de la sphère unité S^2: on notera a, b, c les longueurs des côtés opposés respectivement à A, B, C, puis α, β, γ les angles en A, B, C.(cf figure 23)
Remarque: sur S^2 nous pouvons confondre la longueur d'un côté avec l'angle facial correspondant, alors que sur une sphère de rayon r on aurait: $mesure(\prec AOB) = \frac{c}{r}$.

Formules 1, loi des cosinus pour les côtés:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$$
$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma$$

Démonstration:
On choisit un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que $\vec{k}$ =OA et que B soit dans le plan (O;$\vec{i}$;$\vec{k}$).
On peut alors utiliser le système de coordonnées sphériques (r , θ , φ) (cf figure 24):

$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi)$
$y = r \sin(\theta) \sin(\varphi)$
$z = r \cos(\theta)$

B a alors pour coordonnées sphériques le triplet (1;c;0) et C a pour coordonnées sphériques le triplet (1;b;α) (cf fig.25).
Ce qui revient à dire que B a pour coordonnées cartésiennes :

$x=\sin c$
$y=0$
$z=\cos c$

De même C a pour coordonnées cartésiennes :

$x=\sin b \cos \alpha$
$y=\sin b \sin \alpha$
$z=\cos b$

Si on effectue le produit scalaire de OC et OB on obtient alors:

$\cos a = \sin c \sin b \cos \alpha + \cos c \cos b$.

Par permutation circulaire on obtient les deux autres formules:

$(a,\alpha) \to (b,\beta) \to (c,\gamma) \to (a,\alpha)$

CQFD

Formules 2, loi des cosinus pour les angles:

$$\cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$
$$\cos \beta = -\cos \alpha \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma \cos b$$
$$\cos \gamma = -\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos c$$

Démonstration : On va démontrer ces formules grâce au triangle polaire:
On sait que l'on a, entre ABC et son triangle polaire A'B'C', les relations suivantes:

$a'+\alpha=\pi$, $b'+\beta=\pi$, $c'+\gamma=\pi$, $a+\alpha'=\pi$(*)

On applique la formule 1 à A'B'C', on obtient :

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha'$$

grâce aux relations (*) on a alors:

$$\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi-\beta) \cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\beta) \sin(\pi-\gamma) \cos (\pi-a)$$

$$\Leftrightarrow \quad -\cos \alpha = \cos \beta \cos \gamma - \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos \alpha = -\cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \cos a$$

Par permutation circulaire on obtient les deux autres formules:

$$(a,\alpha) \to (b,\beta) \to (c,\gamma) \to (a,\alpha)$$

CQFD

Formules 3, loi des sinus:	$\dfrac{\sin\alpha}{\sin a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin b}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$

Démonstration:

On remarque tout d'abord qu'étant donné que a, b, c $\in \left]0;\pi\right[$, on a sin a >0, sin b>0 et sin c>0.

La formule 1 donne: $\cos\alpha=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$

d'où $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=\dfrac{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$

$$\sin^2\alpha=\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 b\sin^2 c}$$

et par conséquent: $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a}=\dfrac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}$

cette valeur ne changeant pas par permutation des lettres a, b, et c on a:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a}=\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 b}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}$$

et comme les angles et les côtés d'un triangle sphérique appartiennent à $\left]0;\pi\right[$, leurs sinus sont positifs d'où: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin b}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$ CQFD

<u>Remarque</u>: cette égalité exprime que dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.

Formules 4, loi des cotangentes:

$$\begin{cases}\cot a \sin b - \cot \alpha \sin \gamma = \cos b \cos \gamma \\ \cot b \sin a - \cot \beta \sin \gamma = \cos a \cos \gamma\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cot b \sin c - \cot \beta \sin \alpha = \cos c \cos \alpha \\ \cot c \sin b - \cot \gamma \sin \alpha = \cos b \cos \alpha\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cot c \sin a - \cot \gamma \sin \beta = \cos a \cos \beta \\ \cot a \sin c - \cot \alpha \sin \beta = \cos c \cos \beta\end{cases}$$

Démonstration:

Les formules 1 donnent: $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma$$

en substituant dans la première formule la valeur de cos c donnée par la seconde on a:

$$\cos a = \cos b\,(\cos b \cos a + \sin b \sin a \cos \gamma) + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos \gamma + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos a\,(1 - \cos^2 b) - \sin a \sin b \cos b \cos \gamma = \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos a \sin^2 b - \sin a \sin b \cos b \cos \gamma = \sin b \sin c \cos \alpha$$

or $\sin b \neq 0$ $\qquad \cos a \sin b - \sin a \cos b \cos \gamma = \sin c \cos \alpha \quad \text{(i)}$

De même les formules 1 donnent:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$$

et $\qquad \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos \beta$

d'où: $\qquad \cos a = \cos c\,(\cos c \cos a + \sin c \sin a \cos \beta) + \sin b \sin c \cos \alpha$

$$\cos a = \cos a \cos^2 c + \sin a \sin c \cos c \cos \beta + \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos a\,(1 - \cos^2 c) - \sin a \sin c \cos c \cos \beta = \sin b \sin c \cos \alpha$$
$$\cos a \sin^2 c - \sin a \sin c \cos c \cos \beta = \sin b \sin c \cos \alpha$$

or $\sin c \neq 0$ $\qquad \cos a \sin c - \sin a \cos c \cos \beta = \sin b \cos \alpha \quad \text{(ii)}$

Les formules 3 donnent: $\sin a = \dfrac{\sin c \sin \alpha}{\sin \gamma} = \dfrac{\sin b \sin \alpha}{\sin \beta}$

en divisant (i) par la première valeur de sin a (non nulle car $0 < a < \pi$) on a:

$$\frac{\cos a \sin b}{\sin a} - \frac{\sin a \cos b \cos \gamma}{\sin a} = \frac{\sin c \cos \alpha \sin \gamma}{\sin c \sin \alpha}$$

$$\cot a \sin b - \cos b \cos \gamma = \cot \alpha \sin \gamma \quad \text{(i')}$$

de même avec (ii) et la deuxième valeur de sin a on obtient:

$$\frac{\cos a \sin c}{\sin a} - \frac{\sin a \cos c \cos \beta}{\sin a} = \frac{\sin b \cos \alpha \sin \beta}{\sin b \sin \alpha}$$

$$\cot a \sin c - \cos c \cos \beta = \cot \alpha \sin \beta \quad \text{(ii')}$$

Les égalités (i') et (ii') sont respectivement la première et la dernière des égalités recherchées, par permutation circulaire on obtient les quatre autres formules:

$(a,\alpha) \to (b,\beta) \to (c,\gamma) \to (a,\alpha)$ CQFD

Remarque importante: Les formules 1, 2, 3, et 4 n'utilisent chacune que quatre éléments du triangle sphérique. Elles sont au nombre de quinze ce qui correspond au nombre de combinaison de quatre lettres prises parmi six ($C_6^4 = 15$), autrement dit quelle que soit la donnée de quatre éléments d'un triangle sphérique nous connaissons une égalité les liant:

_ trois côtés et un angle: formules 1
_ un côté et trois angles: formules 2
_ deux côtés et les angles opposés: formules 3
_ deux côtés, l'angle compris entre ces deux côtés et un autre angle: formules 4

II.2 Relations générales

Les formules précédentes vont nous permettre d'étudier les relations générales entre les longueurs des côtés et les mesures des angles du triangle sphérique. Nous travaillons toujours en considérant un triangle sphérique quelconque ABC de la sphère unité.

> Théorème:
> Le triangle sphérique ABC existe si et seulement si $|b-c| < a < b+c$ et a + b + c < 2π
>
> $(a,b,c) \in \left]o;\pi\right[^3$

Démonstration:

Soit ABC un triangle sphérique, la formule 1 nous donne: $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

Or 0 < α < π par définition du triangle sphérique d'où: $|\cos\alpha| = \left|\dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right| < 1$

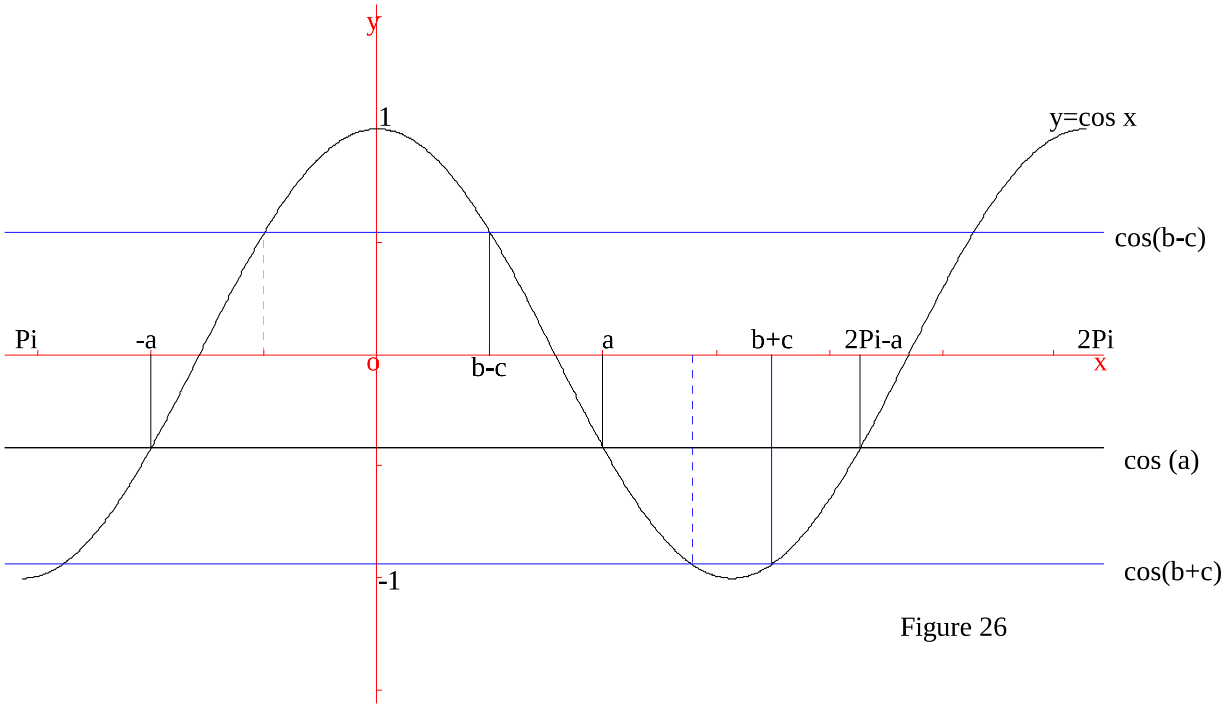


Figure 26

et comme 0 < b < π et 0 < c < π on a: 0 < sin b sin c

donc -sin b sin c < cos a - cos b cos c < sin b sin c

cos (b+c) < cos a < cos (b-c)

on a: 0 < a < π et 0 < b + c < 2π

_ si π < b + c < 2π on a: a < b + c

_ si 0 < b + c < π la fonction cosinus étant décroissante sur]0;π[: a < b+c

on a: π < 2π - a < 2π et 0 < b + c < 2π

_ si 0 < b + c < π on a: b + c < 2π - a

_ si π < b + c < 2π

la fonction cosinus étant croissante sur]π;2π[et cos(2π-a)=cos a

b + c < 2π-a

conclusion on a: a < b + c < 2π - a

d'où a + b + c < 2π

et par permutation circulaire: b < c + a et c < a + b ⇒ $|b-c| < a$

Réciproquement, soit $(a,b,c) \in \left]o;\pi\right[^3$ vérifiant $|b-c| < a < b+c$ et a + b + c < 2π

$\Rightarrow$ - a < b - c < a < b + c < 2π - a

On a -π < b - c < π: _ si -π < b - c < 0 comme cosinus est croissante sur]-π;0[

-a < b - c $\Rightarrow$ cos a = cos (-a) < cos (b-c)

_ si 0 < b - c < π comme cosinus est décroissante sur]0;π[

b - c < a $\Rightarrow$ cos a < cos (b-c)

On a 0 < b + c < 2π: _ si 0 < b + c < π comme cosinus est décroissante sur]0;π[

a < b + c $\Rightarrow$ cos (b+c) < cos a

_ si π < b + c < 2π comme cosinus est croissante sur]π;2π[

b + c < 2π - a $\Rightarrow$ cos (b+c) < cos (2π-a) = cos a

On a donc: cos (b+c) < cos a < cos (b-c)

ce qui entraîne (cf précédemment): $\left|\dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}\right| < 1$

donc il existe $\alpha \in \left]0;\pi\right[$ tel que: $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$

et le triangle sphérique définit par les points A, B, C de coordonnées sphériques (cf formules 1) A=(1,0,0) , B=(1, c , 0) , C=(1, b, α) existe et ses côtés ont pour longueurs a, b et c.

CQFD

<u>Remarque</u>: il est possible de résumer ces relations en considérant les points de $\mathbb{R}^3$ L=(a;b;c), M=(0;0;0), N=(π;0;π), Q=(0;π;π) et P=(π;π;0):

le triangle ABC existe $\Leftrightarrow$ L appartient à l'intérieur du tétraèdre régulier MNPQ

en effet: $\left\{(x,y,z)\in R^3; x = z - y\right\} = (MNQ)$ $\left\{(x,y,z)\in R^3; x = y - z\right\} = (MPQ)$

$\left\{(x,y,z)\in R^3; x = z + y\right\} = (MNP)$ $\left\{(x,y,z)\in R^3; x = 2\pi - z - y\right\} = (NQP)$

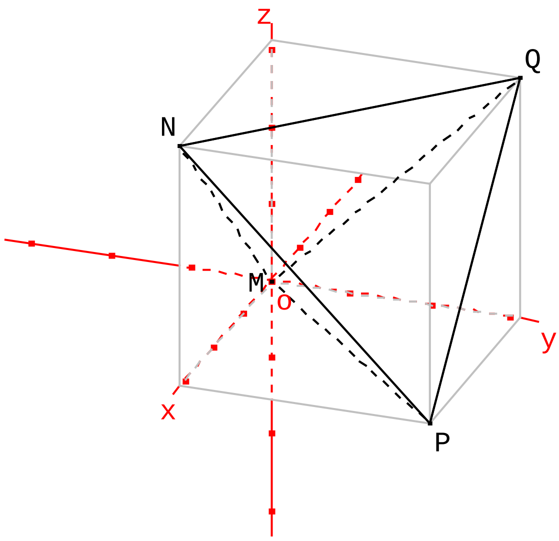


figure 27

Corollaire:
Le triangle sphérique ABC existe si et seulement si : $\alpha + \gamma < \pi + \beta$

$\beta+\alpha<\pi+\gamma$ $\beta+\gamma<\pi+\alpha$ et $\pi<\alpha+\beta+\gamma \qquad (\alpha;\beta;\gamma)\in \left]0;\pi\right[^3$

Démonstration: montrons tout d'abord que le triangle sphérique ABC existe si et seulement si:

$$|\beta-\gamma|<\pi-\alpha<2\pi-\beta-\gamma$$

$$\text{et } \pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi \qquad (\alpha;\beta;\gamma)\in \left]0;\pi\right[^3$$

Soient ABC un triangle sphérique et A'B'C' son triangle polaire de côtés a', b', c' d'après le théorème précédent: $|b'-c'|<a'<b'+c'$ et 0 < a' + b' + c' < 2π

On a: $\left.\begin{array}{l} a' = \pi - \alpha \\ b' = \pi - \beta \\ c' = \pi - \gamma \end{array}\right\} \Rightarrow |\beta-\gamma|<\pi-\alpha<2\pi-\beta-\gamma$

et: $a' + b' + c' + \alpha + \beta + \gamma = 3\pi \Rightarrow \pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$

Réciproquement si α, β, γ vérifient les conditions il existe, d'après le théorème précédent, un triangle A'B'C' ayant pour côtés a' = π - α, b' = π - β, c' = π - γ, donc le triangle ABC polaire de A'B'C' existe et a bien pour angles α, β et γ.

Donc le triangle sphérique ABC existe $\Leftrightarrow$ $|\beta-\gamma|<\pi-\alpha<2\pi-\beta-\gamma$ et $\pi<\alpha+\beta+\gamma<3\pi$ $(\alpha;\beta;\gamma)\in \left]0;\pi\right[^3$

$\Leftrightarrow$ $\alpha-\pi<\beta-\gamma<\pi-\alpha<2\pi-\beta-\gamma$ et $\pi<\alpha+\beta+\gamma \qquad (\alpha;\beta;\gamma)\in \left]0;\pi\right[^3$

$\Leftrightarrow$
$$\begin{array}{l} \alpha+\gamma<\pi+\beta \\ \beta+\alpha<\pi+\gamma \\ \beta+\gamma<\pi+\alpha \\ \text{et } \pi<\alpha+\beta+\gamma \qquad (\alpha;\beta;\gamma)\in \left]0;\pi\right[^3 \end{array}$$

CQFD

<u>Remarque</u>: ces relations donnent avec L=(α;β;γ), M=(π;0;0), N=(0;π;0), Q=(0;0;π) P=(π;π;π):

ABC existe ⇔ L appartient à l'intérieur du tétraèdre régulier MNPQ

En effet: $\{(x,y,z)\in R^3; x=\pi-y-z\}=(MNQ)$ $\quad \{(x,y,z)\in R^3; x=-\pi+y+z\}=(NPQ)$

$\{(x,y,z)\in R^3; x=\pi+y-z\}=(MPQ)$ $\quad \{(x,y,z)\in R^3; x=\pi-y+z\}=(MNP)$

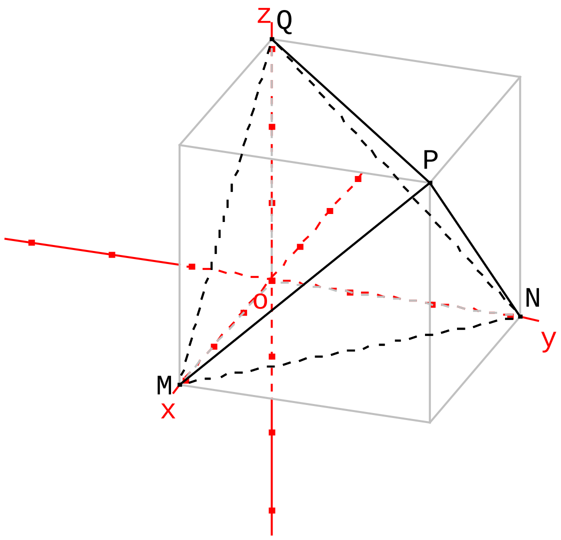


Figure 28

II.3 TRIANGLES SPHERIQUES RECTANGLES

II.3.1 Formules dans un triangle sphérique rectangle

Les égalités obtenues nous permettent d'ores et déjà l'étude d'un cas particulier de triangle sphérique: le triangle sphérique rectangle. Soit ABC un triangle sphérique de S^2 rectangle en C, (i.e. $\gamma=\pi/2$). Les conditions d'existence du triangle sphérique rectangle en fonction de la mesure de ses angles vont être plus simples que dans le cas général.

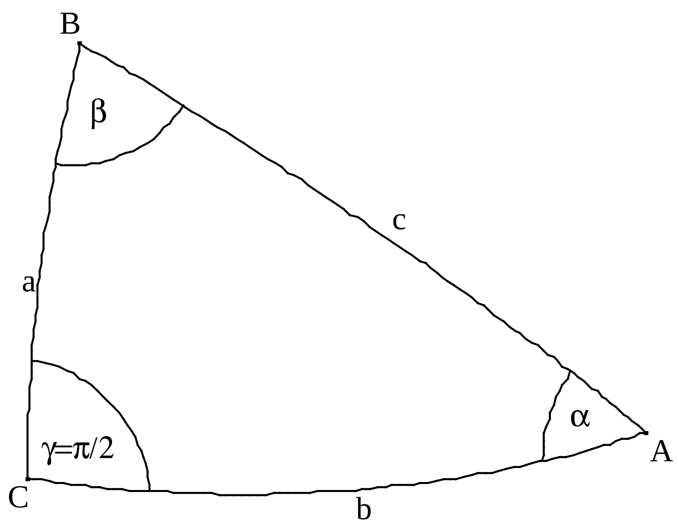


figure 29

Théorème:

ABC triangle sphérique de S² rectangle en C existe ⇔ $|\alpha-\beta|<\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\dfrac{3\pi}{2}$

$(\alpha;\beta)\in\,]0;\pi[^2$

Démonstration: on sait que le triangle sphérique ABC existe si et seulement si:

$\alpha+\gamma<\pi+\beta$; $\beta+\alpha<\pi+\gamma$; $\beta+\gamma<\pi+\alpha$ et $\pi<\alpha+\beta+\gamma$ $\quad(\alpha;\beta;\gamma)\in\,]0;\pi[^3$

d'où avec $\gamma = \pi/2$: $\alpha-\beta<\dfrac{\pi}{2}$; $\beta+\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$; $\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2}<\alpha+\beta$ avec $(\alpha;\beta)\in\,]0;\pi[^2$

CQFD

<u>Remarque</u>: nous pouvons schématiser ses conditions d'existence sur la figure 30, où la partie hachurée représente la zone dans laquelle α et β satisfont aux conditions d'existence du triangle sphérique ABC rectangle en C:

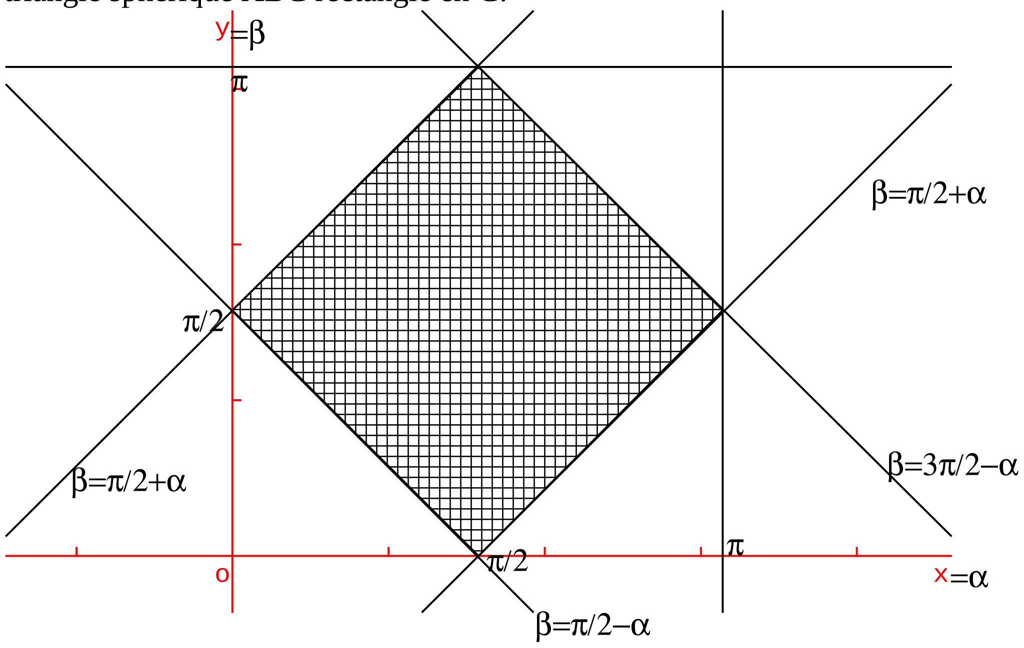


figure 30

Lorsque ABC existe on a les relations suivantes :

Formules fondamentales dans ABC triangle sphérique de S² rectangle en C:

1.	cos c = cos a cos b	4.	cot β = sin a cot b
2.	sin b = sin c sin β		cot α = sin b cot a
	sin a = sin c sin α	5.	cos c = cot β cot α
3.	cot c = cot b cos α	6.	cos β = cos b sin α
	cot c = cot a cos β		cos α = cos a sin β

Démonstration :

1. On utilise la loi des cosinus pour les côtés:

cos c =cos b cos a + sin b sin a cos γ et cos γ = 0 donc: cos c = cos b cos a

2. On utilise la loi des sinus: $\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}$ et sin γ = 1
Donc: sin b = sin β sin c et sin a = sin α sin c

3. On utilise la loi des cotangentes:
cot c sin b - cot γ sin α = cos b cos α et cot γ = 0
$\Rightarrow$ cot c sin b = cos b cos α $\Rightarrow$ cot c = cot b cos α (car $\sin b \neq 0$)
En changeant b par a et α par β on obtient la deuxième formule.

4. Ici aussi on utilise la loi des cotangentes: cot b sin a - cot β sin γ = cos a cos γ
or sin γ =1 et cos γ =0 donc cot b sin a = cot β
En changeant a par b et β par α on obtient la deuxième formule.

5. On utilise la loi des cosinus pour les angles: cos γ = - cos β cos α + sin β sin α cos c
$\Rightarrow$ cos β cos α = sin β sin α cos c
$\Rightarrow$ cos c = cot β cot α

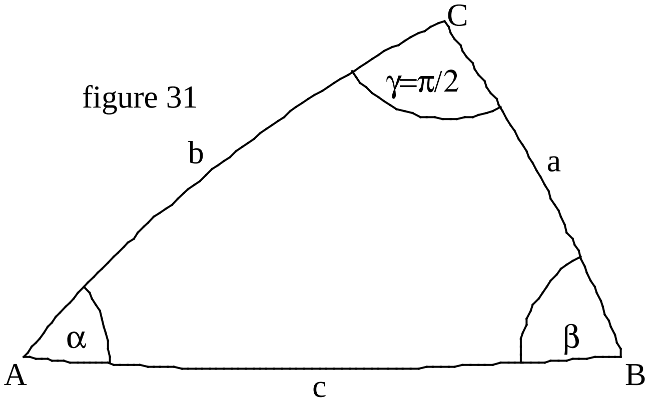
6. On utilise aussi la loi des cosinus pour les angles:
cos β = - cos γ cos α + sin γ sin α cos b $\Rightarrow$ cos β =sin α cos b C.Q.F.D

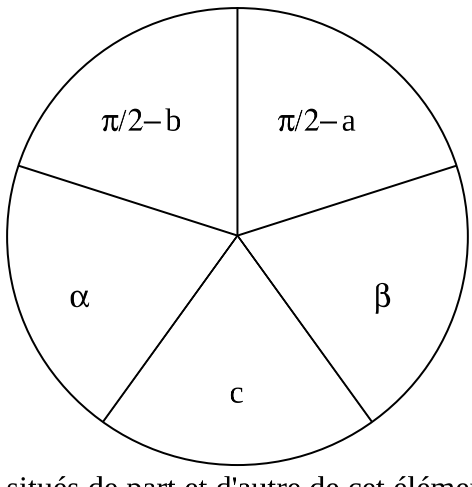
Remarque : Ces dix formules contiennent chacune uniquement trois éléments parmi cinq éléments du triangle (on connaît déjà γ) et leur nombre est exactement le nombre de combinaisons de cinq lettres prises trois à trois ($C_5^3 = 10$).

II.3.2. Règles de Napier

Les règles de Napier, aussi appelées règles des parts circulaires, sont un moyen mnémotechnique pour retrouver les 10 formules démontrées précédemment. Pour formuler ces règles, on représente les cinq éléments du triangle sphérique rectangle (γ n'étant pas pris en compte car droit) disposés dans un cercle (cf. fig. 31) dans l'ordre où ils apparaissent naturellement dans le triangle, à la différence que b et a sont respectivement remplacés par π/2-b et π/2-a.

figure 31





Si on choisit un élément, les deux éléments situés de part et d'autre de cet élément sont appelés éléments adjacents et les deux éléments restants sont appelés éléments opposés.

Alors les règles de Napier s'expriment de la manière suivante:

Règles de Napier:
Le cosinus d'un élément quelconque est égal au produit des cotangentes des éléments adjacents, et aussi à celui des sinus des éléments opposés.(si les cotangentes sont bien définies)

Démonstration:
Vérifions tout d'abord que toutes les formules données par cette règle sont bien des formules fondamentales du triangle sphérique rectangle.
Choisissons c comme élément de référence, on a alors les deux formules:

$$\cos c = \cot\alpha \cot\beta$$

$$\cos c = \sin(\pi/2 - a)\sin(\pi/2 - b) = \cos a \cos b$$

qui sont respectivement les formules 5 et 1 des formules fondamentales.
On choisit maintenant α comme élément de référence, on obtient :

$$\cos\alpha = \sin(\pi/2 - a)\sin\beta = \cos a \sin\beta$$

et $\cos\alpha = \cot(\pi/2 - b)\cot c = \tan b \cot c \Rightarrow \cot c = \cot b \cos\alpha$

en supposant que $b \neq \pi/2$.
Ces formules sont respectivement les formules 6(b) et 3(a).
On choisit β, on obtient :

$$\cos\beta = \sin\alpha \sin(\pi/2 - b) = \sin\alpha \cos b$$

et $\cos\beta = \cot c \cot(\pi/2 - a) = \cot c \tan a \Rightarrow \cot c = \cos\beta \cot a$

en supposant $a \neq \pi/2$.
Ces formules sont respectivement les formules 6(a) et 3(b).
On choisit π/2-a, on obtient:

$$\cos(\pi/2 - a) = \sin a = \sin\alpha \sin c$$

et $\cos(\pi/2 - a) = \sin a = \cot\beta \cot(\pi/2 - b) \Rightarrow \cot\beta = \sin a \cot b$

en supposant $b \neq \pi/2$.
On a obtenu les formules 2(b) et 4(a).
On prend π/2-b, on obtient:

$$\cos(\pi/2 - b) = \sin b = \sin c \sin\beta$$

et $\cos(\pi/2 - b) = \sin b = \cot\alpha \cot(\pi/2 - a) \Rightarrow \cot\alpha = \sin b \cot a$

en supposant $a \neq \pi/2$.
On a obtenu les formules 2(a) et 4(b).
Ainsi toutes les formules données par les règles de Napier sont bien les formules fondamentales dans un triangle sphérique rectangle, et la liste obtenue est exhaustive. CQFD

II.3.3. Règle des quadrants

Pour certaines résolutions, étant donnés deux éléments du triangle on obtient un troisième élément grâce à une formule donnant le sinus de l'élément recherché. Des renseignements supplémentaires sont alors nécessaires pour savoir si cet élément est inférieur ou supérieur à $\pi/2$. Ces renseignements sont donnés par la règle des quadrants (nous entendons par quadrants les ensembles $\{x; 0 < x \leq \pi/2\}$ et $\{x; \pi/2 \leq x < \pi\}$):

Règle des quadrants:
1. Un côté et son angle opposé sont toujours dans le même quadrant
2. Si l'hypoténuse est inférieur à π/2 alors: a et b sont dans le même quadrant

3. Si l'hypoténuse est supérieur à $\pi/2$ alors:	α et β sont dans le même quadrant a et b sont dans des quadrants différents α et β sont dans des quadrants différents

Démonstration:

1. Nous allons démontrer cette assertion pour a et α. On utilise la formule fondamentale 6: $\cos\alpha = \sin\beta\cos a$.
Puisque $\beta<\pi$ alors $\sin\beta$ est positif. Ainsi $\cos\alpha$ et cos a sont de même signe, c'est-à-dire que a et α sont dans le même quadrant. Le même raisonnement sur la deuxième formule du 6. établit la même relation entre b et β.

2 et 3. On utilise la formule 1: $\cos c = \cos a \cos b$.
Si $c < \pi/2$ alors cos c est positif et donc cos a et cos b sont de même signe; ainsi a et b sont dans le même quadrant.
Si $c > \pi/2$ alors cos c est négatif et cos a et cos b sont de signes opposés; ainsi a et b sont dans des quadrants différents.
Si on utilise la formule 5 : $\cos c = \cot\beta \cot\alpha$, alors si $c<\pi/2$, cos c est positif, ainsi $\cot\alpha$ et $\cot\beta$ sont de même signe. Comme $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ sont toujours positifs alors $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ sont de même signe donc α et β sont dans le même quadrant.
Si $c>\pi/2$,cos c est négatif, ainsi $\cot\alpha$ et $\cot\beta$ sont de signes opposés. Comme $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ sont toujours positifs, alors $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ sont de signes opposés donc α et β sont dans des quadrants différents. CQFD

II.3.4. Résolutions systématiques d'un triangle sphérique rectangle

Etant donné que l'on connaît l'angle droit, pour la résolution la donnée de deux éléments est suffisante. Il existe 6 cas différents de résolution, pour les résoudre nous utiliserons les formules fondamentales 1 à 6 et la règle des quadrants.
Avant toute résolution, remarquons que lorsqu'un angle ou un côté est donné par son cosinus, par sa tangente ou sa cotangente, sa valeur est déterminée, car ce côté ou cet angle est compris entre 0 et π. Mais s'il est donné par son sinus, il y a deux valeurs pour cet angle ou ce côté. Nous lèverons toute ambiguïté grâce à la règle des quadrants.

<u>Remarque</u>: nous utiliserons les déterminations suivantes des réciproques des fonctions trigonométriques: $\arccos :]-1;1[\to]0;\pi[$ $\arcsin :]0;1] \to]0;\pi/2]$

$\operatorname{arg\,cot} :]-\infty;\infty[\to]0;\pi[$ $\arctan : \mathbb{R}^* \to]0;\pi/2[\cup]\pi/2;\pi[$

<u>1. Lorsque l'hypoténuse et un côté sont donnés :</u>

Sont donnés l'hypoténuse c et le côté b (par permutation $(\alpha,a)\leftrightarrow(\beta,b)$ on obtient les solutions si a est donné et non b):

1) si $b<\pi/2$ la solution existe si et seulement si b<c<π-b:

$$a = \arccos\frac{\cos c}{\cos b} \qquad \alpha = \arccos\left(\cos a\frac{\sin b}{\sin c}\right) \qquad \beta = \arcsin\frac{\sin b}{\sin c}$$

2) si $b=\pi/2$ alors il existe une infinité de solutions: $c=\pi/2$; $\beta=\pi/2$ et α = a

3) si $b > \pi/2$ la solution existe si et seulement si π-b<c<b:

$$a = \arccos \frac{\cos c}{\cos b} \qquad \alpha = \arccos\left(\cos a \frac{\sin b}{\sin c}\right) \qquad \beta = \pi - \arcsin \frac{\sin b}{\sin c}$$

Démonstration: Cherchons le troisième côté a et les deux angles α et β.

On peut les calculer grâce aux formules:

cos c = cos a cos b, sin b = sin c sin β, cos α = cos a sin β

Unicité:

1)si $b \neq \pi/2$ alors

$\cos c = \cos a \cos b \Leftrightarrow \cos a = \dfrac{\cos c}{\cos b}$ détermine parfaitement a.

$\sin b = \sin c \sin \beta \Leftrightarrow \sin \beta = \dfrac{\sin b}{\sin c}$ ceci nous donne deux valeurs pour β, mais connaissant b, la règle des quadrants permet de déterminer exactement β.

cos α = cos a sin β détermine exactement α.

Existence: le problème admet une solution ⇔ sin b<sin c

En effet: sin b<sin c ⇒ sin β est inférieur à 1

et sin b<sin c ⇒ sin²b < sin²c ⇒ 1-sin²c < 1-sin²b ⇒ $|\cos c| < |\cos b|$ c'est-à-dire que cos a est compris strictement entre -1 et +1.

Réciproquement: $\sin b \geq \sin c \Rightarrow |\cos a| \geq 1$ impossible car $a \in]0;\pi[$

Ainsi si sin b<sin c, on obtient une valeur de α, et connaissant b et c on peut construire le triangle sphérique ABC (cf figure 25)

2)si $b = \pi/2$ alors cos c = 0 ⇒ $c = \pi/2$ puis sin β = 1 donc $\beta = \pi/2$

alors cos α = cos a sin β donne α = a (cosinus est une bijection de $]0;\pi[$ sur $]-1;1[$), on a toujours l'existence. CQFD

<u>2. Lorsque les deux cotés de l'angle droit sont donnés:</u>

Sont donnés a et b, le problème admet toujours une solution unique:

$c = \arccos(\cos a \cos b)$ $\beta = \arg\cot(\sin a \cot b)$

$\alpha = \arg\cot(\sin b \cot a)$

Démonstration:

On emploiera les formules: cos c = cos a cos b, cot β = sin a cot b, cotα = sin b cot a.

Unicité et existence: $\cos c = \cos a \cos b$ détermine exactement c.

$\cot \beta = \sin a \cot b$ détermine exactement β .

$\cot \alpha = \sin b \cot a$ détermine exactement α.

On remarque que ce problème admet toujours une solution car connaissant a et b et $\gamma = \pi/2$ on peut construire le triangle sphérique ABC par une méthode analogue à la figure 25. CQFD

<u>3.Lorsque l'hypoténuse et un angle sont donnés:</u>

Sont donnés l'hypoténuse c et l'angle β (par permutation $(\alpha, a) \leftrightarrow (\beta, b)$ on obtient les solutions si α est donné et non β):

1) si $\beta < \pi/2$ le problème admet une solution unique:

b =arcsin(sin c sin β) $a = \arg\cot \dfrac{\cot c}{\cos \beta}$ $\alpha = \arg\cot(\tan \beta \cos c)$

2) si $\beta = \pi/2$ alors: $c = \pi/2$; $b = \pi/2$ et α = a, on a une infinité de solutions.
3) si $\beta > \pi/2$ le problème admet une solution unique:

b =π-arcsin(sin c sin β) $\quad a = \arg\cot\dfrac{\cot c}{\cos\beta} \quad \alpha = \arg\cot(\tan\beta\cos c)$

Démonstration:
On emploie les formules suivantes: sin b = sin c sin β, cot c = cot a cos β, cos c =cot α cot β
sin b = sin c sin β donne deux valeurs pour b, mais étant donnée la règle des quadrants, b et β seront dans le même quadrant. On connaît donc la valeur de b.
si $\beta \neq \pi/2$ cot c = cot a cos β détermine exactement la valeur de a .
$\cos c = \cot\alpha\cot\beta$ détermine exactement α .
si $\beta = \pi/2$ alors $c = \pi/2$, $b = \pi/2$ et on a uniquement a = α.(cf démonstration du cas précédent).
Connaissant a, c et l'angle compris on peut construire ABC CQFD

4.Lorsque sont donnés un côté et son angle adjacent:

Sont donnés b et α, le problème admet toujours une unique solution:
β =arccos(cos b sin α) $\quad a = \arg\cot\dfrac{\cot\alpha}{\sin b} \quad c = \arg\cot(\cot b\cos\alpha)$

Démonstration: On utilise les formules:
cos β =cos b sin α , cot α=sin b cot a et cot b cos α = cot c
cos β =cos b sin α détermine exactement la valeur de β
$\cot a\sin b = \cot\alpha \Leftrightarrow \cot a = \dfrac{\cot\alpha}{\sin b}$ détermine exactement a
$\cot b\cos\alpha = \cot c$ détermine exactement c
Ce problème admet toujours une unique solution. CQFD

5.Lorsque les deux angles obliques sont donnés:

Sont donnés α et β, le problème admet une unique solution si et seulement si $|\alpha-\beta| < \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \dfrac{3\pi}{2}$: $\quad a = \arccos\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} \quad b = \arccos\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha} \quad c = \arccos(\cot\alpha\cot\beta)$

Démonstration:
Existence: les conditions d'existence du triangle sphérique rectangle en C en fonction de ses angles sont $|\alpha-\beta| < \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \dfrac{3\pi}{2}$
On utilise les formules: cos α =cos a sin β , cos β = cos b sin α , cos c = cot α cot β.
Unicité: $\cos\alpha = \cos a\sin\beta \Leftrightarrow \cos a = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}$ détermine exactement a.
$\cos\beta = \cos b\sin\alpha \Leftrightarrow \cos b = \dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha}$ détermine exactement b.
cos c = cot α cot β détermine exactement c. CQFD

6.Lorsqu'un côté de l'angle droit et son angle opposé sont donnés:

Si b et β sont donnés (par permutation on obtiendra a et α), le problème n'admet de solution que dans les 4 cas suivants: _ si b=π/2 et β=π/2 alors: $c=\pi/2$ et α = a

_ si $\beta=b\neq\pi/2$ alors $c=\alpha=a=\pi/2$

Si $b\neq\pi/2$ on note: $\tilde{a}=\arcsin(\tan b\cot\beta)$ $\tilde{c}=\arcsin\dfrac{\sin b}{\sin\beta}$

$\tilde{\alpha}=\arcsin\dfrac{\cos\beta}{\cos b}$

_ si b< β ≤ π/2 alors on a deux solutions distinctes:

$a=\tilde{a}\ ;\ c=\tilde{c}\ ;\ \alpha=\tilde{\alpha}$ ou bien $a=\pi-\tilde{a}\ ;\ c=\pi-\tilde{c}\ ;\ \alpha=\pi-\tilde{\alpha}$

_ si b > β ≥ π/2 alors on a deux solutions distinctes:

$a=\tilde{a}\ ;\ c=\pi-\tilde{c}\ ;\ \alpha=\tilde{\alpha}$ ou bien $a=\pi-\tilde{a}\ ;\ c=\tilde{c}\ ;\ \alpha=\pi-\tilde{\alpha}$

Démonstration:

On peut employer les formules: sin b = sin c sin β, cos β=cos b sin α, sin a=tan b cotβ.

1)si $b\neq\pi/2$,

$\sin b=\sin c\sin\beta\Leftrightarrow\sin c=\dfrac{\sin b}{\sin\beta}$ donne deux valeurs pour c: $c_1\leq\pi/2;c_2\geq\pi/2$

cot b sin a= cotβ. donne deux valeurs pour a: $a_1\leq\pi/2;a_2\geq\pi/2$

$\cos\beta=\cos b\sin\alpha\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{\cos\beta}{\cos b}$ donne deux valeurs pour b: $b_1\leq\pi/2;b_2\geq\pi/2$

Il faut donc étudier les valeurs obtenues suivant les valeurs de b et β données.

A.Si b<π/2 alors β≤π/2 (règle des quadrants)

Existence d'une solution $\begin{cases}\sin b\leq\sin\beta\\ \cos\beta\leq\cos b\end{cases}$ ⇔ b≤β (car sinus croissant et cosinus décroissant sur $]0;\pi/2]$).

$\cos b\geq 0$ ⇒ cos c=cos a cos b≥ 0 ⇒a et c sont dans le même quadrant.

De plus on a forcément a et α dans le même quadrant, on aura donc deux ensemble de solutions au problème: a=a1 α=α1 et c=c1ou a=a2 α=α2 et c=c2.

On a donc deux cas: _ si b=β alors on a une unique solution $c=\alpha=a=\pi/2$

_ si $b\neq\beta$ on a deux solutions distinctes

B.Si b > π/2 alors β ≥ π/2 (règle des quadrants)

Existence d'une solution $\begin{cases}\sin b\leq\sin\beta\\ \cos\beta\leq\cos b\end{cases}$ ⇔ b≥β(car sinus et cosinus décroissant sur$[\pi/2;\pi[$).

$\cos b\leq 0$ ⇒ cos c=cos a cos b≤ 0 ⇒a et c sont dans des quadrants différents.

De plus on a forcement a et α dans le même quadrant, on aura donc deux ensemble de solutions au problème: a=a1 α=α1 et c=c2ou a=a2 α=α2 et c=c1.

On a donc deux cas: _ si b=β alors on a une unique solution $c=\alpha=a=\pi/2$

_ si $b\neq\beta$ on a deux solutions distinctes

2)si $b=\pi/2$

cot b sin a= cot β ⇒ $\beta=\pi/2$ alors: $c=\pi/2$ et α = a (cf démonstration du premier cas 2-lorsque sont donnés l'hypoténuse et un côté-)

CQFD

<u>Remarque</u>: en exceptant b=β, le problème admet deux solutions lorsqu'il est possible.
Remarquons que si l'on construit une triangle ABC répondant au problème, alors le triangle AB'C, où B' est le point d'intersection des prolongements de [AC] et [BC] (cf fig 32), est aussi solution du problème. En effet prenons par exemple ABC avec les données a1, c1 et α1. Alors AB'=π-c1=c2, B'C=π-a1=a2 et on a aussi l'angle ente [AB'] et [AC] égal à π-α1=α2 .

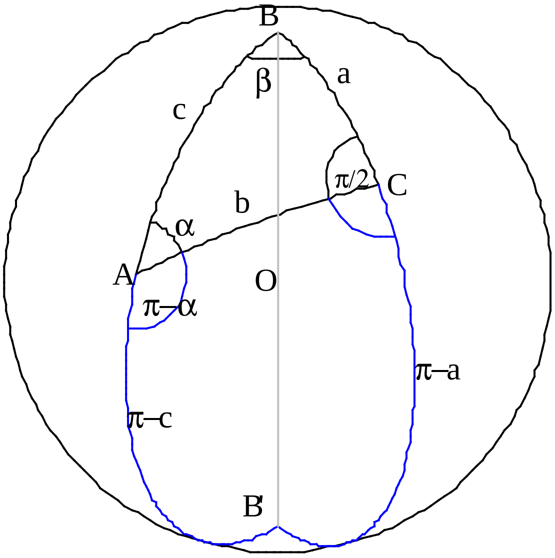


figure 32

II.3.5. Résolution de triangles sphériques grâce aux triangles rectangles

On peut résoudre les triangles sphériques grâce aux triangles sphériques rectangles:

_ triangles sphériques rectilatères

On rappelle qu'un triangle rectilatère a pour triangle polaire un triangle rectangle. On résout ainsi le triangle rectangle polaire au triangle rectilatère recherché, puis l'on revient à ce dernier grâce aux propriétés connues entre un triangle et son triangle polaire: $a'+\alpha = a+\alpha' = \pi$, $b'+\beta = b+\beta' = \pi$, $c'+\gamma = c+\gamma' = \pi$.

_ triangles sphériques quelconques

Comme pour les triangles euclidiens on peut étudier un triangle sphérique quelconque en le "découpant" en deux triangles rectangles et en manipulant des angles auxiliaires.

II.4 Autres formules du cas général

II.4.1 Relations importantes

L'étude du triangle sphérique quelconque nécessite de développer les relations déjà établies.

Formules 5, loi des demi-angles:	$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}$
p:= (a+b+c)/2	$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}$

(et permutations circulaires...)	$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}$

Démonstration:

La formule 1 nous donne: $\cos\alpha=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$

or les formules de trigonométrie classiques donnent (comme $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{2}$ sinus et cosinus sont positifs): $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ et $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\sin c}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}{\sin b\sin c}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}$$

CQFD

Formules 6, loi des demi-côtés:	$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$
S := (α +β +γ)/2	$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$
(et permutations circulaires...)	$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\alpha)}{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}}$

Démonstration:

Soit A'B'C' le triangle polaire de ABC, d'après les formules 5, et comme on a:

p'= (a' + b' +c')/2 = (3π - α - β - γ)/2 = 3π/2 - S

$$\sin\frac{a}{2}=\cos\frac{\pi-a}{2}=\cos\frac{\alpha'}{2}=\sqrt{\frac{\sin p'\sin(p'-a')}{\sin b'\sin c'}}=\sqrt{\frac{-\cos S\sin(3\pi/2-\pi-S+\alpha)}{\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)}}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

$$\cos\frac{a}{2}=\sin\frac{\alpha'}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p'-b')\sin(p'-c')}{\sin b'\sin c'}}=\sqrt{\frac{\sin(\pi/2-S+\beta)\sin(\pi/2-S+\gamma)}{\sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)}}=\sqrt{\frac{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

$$\tan\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\alpha)}{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}}$$

CQFD

II.4.2 Analogies de Gauss ou de Delambre

Ces formules renferment les six éléments du triangle sphérique, Delambre les a fait connaître en 1807 dans la *Connaissance des temps*, mais elles sont parfois attribuées à Gauss qui lui,ne les a données que deux ans plus tard.

Analogies de Gauss ou de Delambre:

$$\frac{\sin((\alpha+\beta)/2)}{\cos(\gamma/2)}=\frac{\cos((a-b)/2)}{\cos(c/2)} \qquad \frac{\sin((\alpha-\beta)/2)}{\cos(\gamma/2)}=\frac{\sin((a-b)/2)}{\sin(c/2)}$$

$$\frac{\cos((\alpha+\beta)/2)}{\sin(\gamma/2)}=\frac{\cos((a+b)/2)}{\cos(c/2)} \qquad \frac{\cos((\alpha-\beta)/2)}{\sin(\gamma/2)}=\frac{\sin((a+b)/2)}{\sin(c/2)}$$

Démonstration:

Les formules 5, donnent:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}}\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin p}{\sin a\sin c}}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}$$

de même: $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(p-b)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\frac{\sin p}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin p}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a\sin b}}=\frac{\sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{\gamma}{2}$$

de là on déduit :

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin(p-b)\pm\sin(p-a)}{\sin c} \quad (\text{ i })$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin p\pm\sin(p-c)}{\sin c} \quad (\text{ ii })$$

on a par ailleurs:

$$\sin(p-b)+\sin(p-a)=\sin\left(\frac{a-b}{2}+\frac{c}{2}\right)+\sin\left(\frac{c}{2}-\frac{a-b}{2}\right)=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin(p-b)-\sin(p-a)=2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\sin p+\sin(p-c)=\sin\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c}{2}\right)+\sin\left(\frac{a+b}{2}-\frac{c}{2}\right)=2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a+b}{2}$$

$$\sin p-\sin(p-c)=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\sin c=2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$$

par conséquent (i) donne:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}=\frac{2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a-b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}$$

et (ii) donne:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{2\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}} \qquad \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a+b}{2}}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

CQFD

II.4.3 Analogies de Napier

Analogies de Napier:

$$\cot\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\cot\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$\tan\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=\tan\frac{b-c}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2}=\cot\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$
$$\cot\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}=\tan\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{b+c}{2}$$

<u>Remarque</u>: les tangentes sont bien définies car : $-\pi<b-c<\pi$ et $-\pi<\beta-\gamma<\pi$
de même pour les cotangentes car: $0<b+c<2\pi$ et $0<\beta+\gamma<2\pi$

Démonstration: d'après les analogies de Delambre on a,

$$\cot\frac{b+c}{2}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{a}{2}}\,\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\cot\frac{a}{2}$$

$$\tan\frac{b-c}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{a}{2}}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}\tan\frac{a}{2}$$

$$\cot\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{\cos\frac{a}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}\,\frac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}}{\cos\frac{b-c}{2}}\tan\frac{\alpha}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\,\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\cot\frac{\alpha}{2}$$

CQFD

Ces analogies sont utiles dans certaines résolutions et permettent de dégager une propriété intéressante:

Propriété: dans un triangle sphérique le plus grand des côtés est opposé au plus grand angle.

Démonstration: supposons c le plus grand des côtés si b<c on a $\sin\frac{b-c}{2}<0$ alors comme $\cot\frac{\alpha}{2}>0$ et $\sin\frac{b+c}{2}>0$ on a d'après la dernière analogie de Napier on a: $\tan\frac{\beta-\gamma}{2}<0 \Rightarrow \beta<\gamma$

De la même façon a<c $\Rightarrow$ α<γ CQFD

Formules des tangentes:	$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\tan\frac{a-b}{2}\cot\frac{a+b}{2}$

Démonstration: les analogies de Napier donnent:

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\cot\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}\cot\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\,\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{a-b}{2}\cot\frac{\gamma}{2}}=\tan\frac{a-b}{2}\cot\frac{a+b}{2}\quad \text{CQFD}$$

II.4.4 Formules utilisant les déterminants

Etant donné que nous pouvons aussi définir le triangle sphérique par la donnée des trois vecteurs unitaires libres de $\mathbb{R}^3$, il paraît intéressant d'étudier les formules liant les déterminants de la matrice 3×3 formée par les coordonnées de ces trois vecteurs.

Formules 7, loi des déterminants: $\delta=\frac{\det(OA,OB,OC)}{2}$ $\quad\Delta=\frac{\det(OA',OB',OC')}{2}$

$$\delta=\frac{\sin b\sin c\sin\alpha}{2}=\sqrt{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}\qquad \text{où } p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\Delta=\frac{\sin\beta\sin\gamma\sin a}{2}\sqrt{-\cos S\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}\qquad \text{où } S=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

Démonstration: on choisit un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ tel que:
_ $\vec{i}=OA$
_ $B\in(O,\vec{i},\vec{j})$

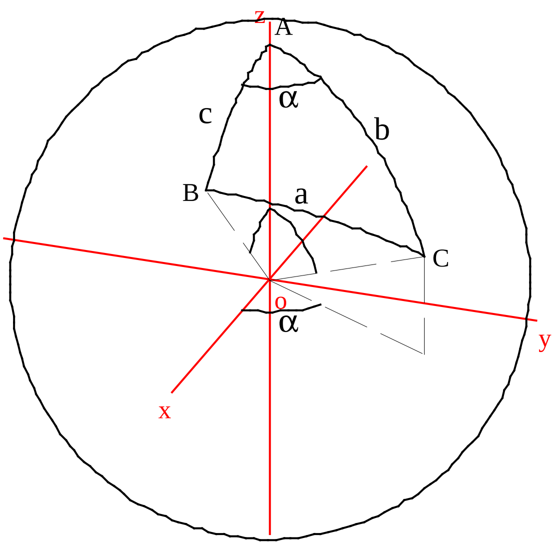


figure 33

on a alors (cf figure 33): OA = (1;0;0)
OB = (cos c;sinc;0)

$$OC = (\cos b; \sin b \cos \alpha; \sin b \sin \alpha)$$

$$2\delta = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ 0 & \sin c & \sin b \cos\alpha \\ 0 & 0 & \sin b \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin b \sin c \sin\alpha$$

A'B'C' étant le triangle polaire de ABC:

$$2\Delta = \sin b' \sin c' \sin\alpha' = \sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\sin(\pi-a) = \sin\beta\sin\gamma\sin a$$

ensuite, d'après la formule des demi-angles:

$$\delta = \sin b \sin c \frac{\sin\alpha}{2} = \sin b \sin c \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \sin b \sin c \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}}$$

$$\delta = \sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}$$

d'où en appliquant cette formule au triangle A'B'C' polaire de ABC:

$$\Delta = \sqrt{\sin p' \sin(p'-a')\sin(p'-b')\sin(p'-c')} = \sqrt{\sin\frac{a'+b'+c'}{2}\sin\frac{-a'+b'+c'}{2}\sin\frac{a'-b'+c'}{2}\sin\frac{a'+b'-c'}{2}}$$

$$\Delta = \sqrt{\sin\frac{3\pi-\alpha-\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\pi+\alpha-\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\pi-\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\pi-\alpha-\beta+\gamma}{2}}$$

$$\Delta = \sqrt{-\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}$$ CQFD

Formules 8, nouvelle loi des sinus:	$\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$

Démonstration: la formule 3 des sinus donne: $\frac{\sin\beta}{\sin b}\frac{\sin a}{\sin\alpha} = 1$

et les formules des déterminants donnent: $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{\sin\beta\sin\gamma\sin a}{\sin b \sin c \sin\alpha} = \left(\frac{\sin\beta}{\sin b}\frac{\sin a}{\sin\alpha}\right)\frac{\sin\gamma}{\sin c} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}$

De même pour les deux autres égalités. CQFD

II.5 Expressions diverses de l'excès sphérique

Nous allons étudier une quantité liée aux angles du triangle sphérique, appelée excès sphérique du triangle, notée ε et définie par: $\varepsilon = \alpha+\beta+\gamma-\pi$

Remarque: d'après les conditions d'existence du triangle sphérique en fonction de ses angles nous savons que : $0 < \varepsilon < 2\pi$

II.5.1 Aire du triangle sphérique

Définition: on appelle **fuseau d'angle α** de la sphère (de rayon r) S_r de $\mathbb{R}^3$, la partie de celle-ci comprise entre deux demi grands cercles de mêmes extrémités ayant pour supports deux droites sphériques s'intersectant avec l'angle α (cf figure 34).

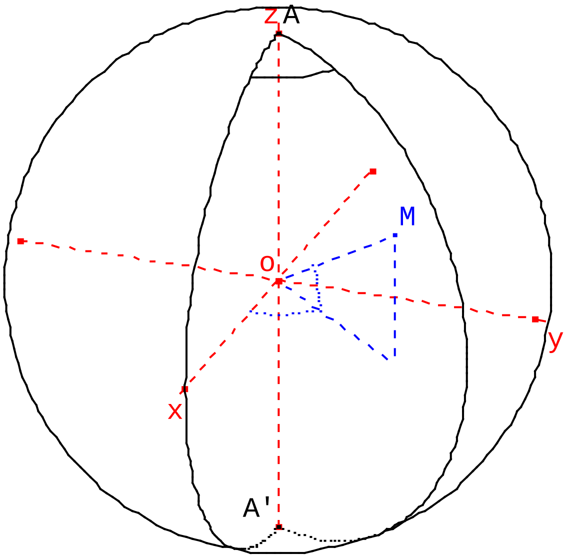


figure 34

Lemme: Soit Aire(F) l'aire du fuseau d'angle α de S_r:
$$Aire(F) = 2\alpha r^2$$

Démonstration: en utilisant le système de coordonnées indiqué sur la figure 34, les points communs des deux arcs étant pris comme points de coordonnées (r,0,0) et (-r,0,0), et l'un des arcs étant dans le plan (o;x;z) nous avons: $x = r\cos\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\cos\varphi$
$z = r\sin\varphi$

Le fuseau est paramètré par le difféomorphisme de classe C^1:

$$(\theta,\varphi)\in\left]0;\alpha\right[\times\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\qquad \Psi:\begin{pmatrix}\theta\\ \varphi\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}r\cos\theta\cos\varphi\\ r\sin\theta\cos\varphi\\ r\sin\varphi\end{pmatrix}$$

(difféomorphisme car $\Psi^{-1}:\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}\arctan\frac{y}{x}\\ \arcsin\frac{z}{r}\end{pmatrix}$ et clairement dérivable pour $\alpha<\frac{\pi}{2}$)

$$Jac_\Psi(\theta;\varphi)=\begin{pmatrix}-r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi\\ r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ 0 & r\cos\varphi\end{pmatrix} \text{ d'où } \frac{d\Psi}{d\theta}(\theta,\varphi)\wedge\frac{d\Psi}{d\varphi}(\theta;\varphi)=\begin{pmatrix}r^2\cos\theta\cos^2\varphi\\ r^2\sin\theta\cos^2\varphi\\ r^2\cos\varphi\sin\varphi\end{pmatrix}$$

$$\left\|\frac{d\Psi}{d\theta}(\theta,\varphi)\wedge\frac{d\Psi}{d\varphi}(\theta;\varphi)\right\|^2=r^4(\cos^4\varphi+\cos^2\varphi\sin^2\varphi)=r^4\cos^2\varphi$$

Or comme $\varphi\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\left\|\frac{d\Psi}{d\theta}(\theta,\varphi)\wedge\frac{d\Psi}{d\varphi}(\theta;\varphi)\right\|=r^2\cos\varphi$

Alors pour $\alpha<\frac{\pi}{2}$: $Aire(F)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^\alpha r^2\cos(\varphi)d\theta d\varphi=r^2\alpha\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi d\varphi=2r^2\alpha$

pour $\alpha > \frac{\pi}{2}$, sachant que l'aire est additive on peut calculer l'aire de F', un fuseau d'angle α/2 qui représente donc la moitié de F : Aire(F)=2Aire(F')=2*2r²(α/2)=2r²α. CQFD

Formule de Girard (1625): Soit Aire(ABC) l'aire d'un triangle sphérique ayant pour angles α, β, γ, alors: Aire(ABC) = (α + β + γ - π)r² = ε r²

Démonstration: nous proposerons deux démonstrations, la première utilisant des arguments géométriques, la deuxième utilisant des notions de géométrie différentielle.

Première démonstration:

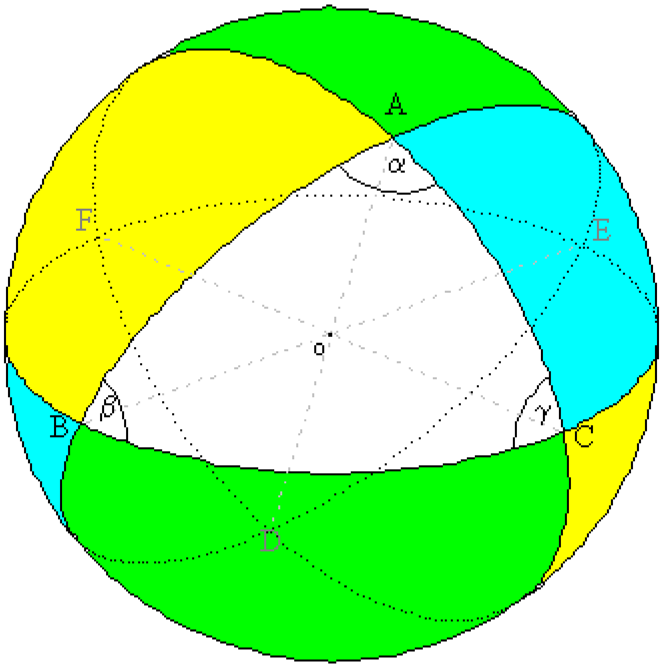


Figure 35

Soit G la demi-sphère contenant A et délimitée par le grand cercle passant par B et C. On note D, E, et F respectivement les symétriques de A, B et C par rapport à O. A des ensemble de mesures nuls près (des arcs de cercles), G admet une partition en quatre ensembles:
_ le triangle sphérique ABC
_ AFE, ACE et BAF trois autres triangles sphériques

Mais $ABC \cup ACE$ est un fuseau d'angle β, $ABC \cup BAF$ est un fuseau d'angle γ, tandis que $ABC \cup AFE$ a même aire (par symétrie par rapport à O pour AFE, centre de la sphère) que $ABC \cup BCD$ qui est un fuseau d'angle α. Donc par le lemme précédent et sachant que l'aire est additive et invariante sous isométrie :

2πr² = Aire(G) = Aire(ABC) + Aire(AFE) + Aire(ACE) + Aire(BAF)

2πr² = Aire(ABC) + (2αr² - Aire(ABC)) + (2βr²-Aire(ABC)) + (2γr²-Aire(ABC))

2Aire(ABC) = 2(α + β + γ - π)r²

Deuxième démonstration:

Prenons l'axe des x dans le plan (OBC) et le sommet A sur (OZ). Soient θ_0 et θ_1 les longitudes des sommets B et C, on a: $\alpha = |\theta_1 - \theta_0|$

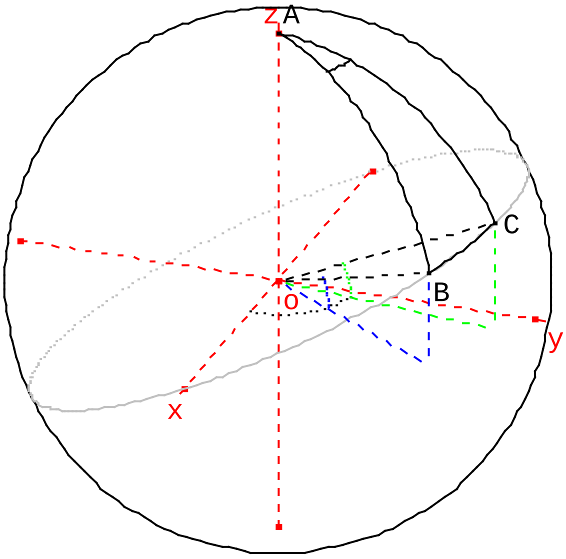


figure 36

Avec un paramètrage analogue à celui du lemme précédent on a:
(u(θ) est la colatitude d'un point M se déplaçant sur le côté BC, et ayant pour longitude θ)

$$Aire(ABC)=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{\frac{\pi}{2}-u(\theta)}^{\pi/2} r^2\cos\varphi d\varphi d\theta = r^2\int_{\theta_1}^{\theta_2} 1-\sin(\frac{\pi}{2}-u(\theta))d\theta = r^2\alpha - r^2\int_{\theta_1}^{\theta_2}\cos(u(\theta))d\theta$$

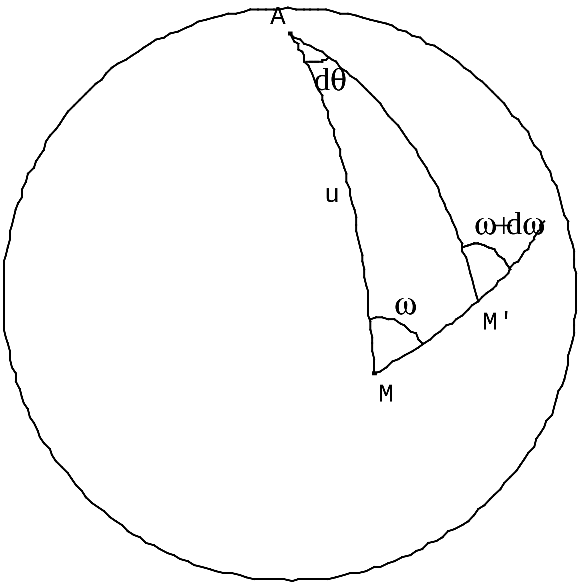


figure 37

La formule 2, des cosinus pour les angles, appliquée au triangle de la figure 37 donne, avec $\alpha=\pi-\omega-d\omega$, $\beta=d\theta$, $\gamma=\omega$ et a = u:

$$\cos(\pi-\omega-d\omega)=-\cos d\theta\cos\omega+\sin d\theta\sin\omega\cos u(\theta)$$

or $$\cos(\pi-\omega-d\omega)=-\cos(\omega+d\omega)=-\cos\omega\cos d\omega+\sin\omega\sin d\omega$$

étant donné que par définition dω et dθ sont très "petits" on a : $\cos d\theta=1;\sin d\theta=d\theta$ et de même pour dω donc : $d\omega=(\cos u(\theta))d\theta$

et ω valant β en B et π-γ en C: $Aire(ABC)=r^2\alpha-r^2\int_{\beta}^{\pi-\gamma}d\omega=r^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$

CQFD

Corollaire: Soit P un polygone sphérique convexe de la sphère S_r à N sommets et d'angles α_i (i=1,...,N), alors: $Aire(P) = r^2\left(\sum_{i=1}^{N}\alpha_i - (N-2)\pi\right)$

Démonstration:

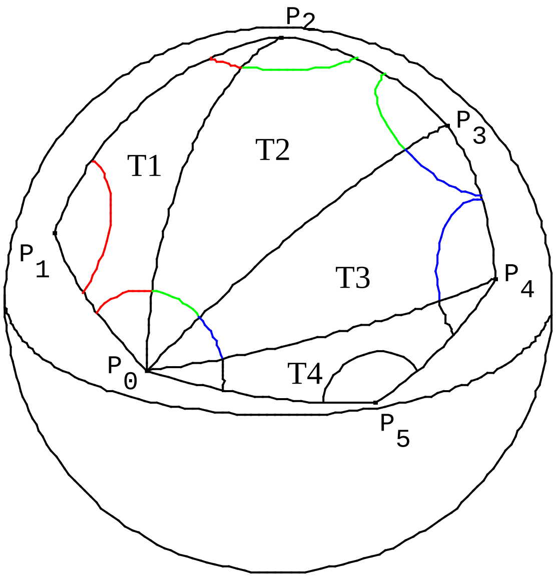


figure 38

Soit ($P_0P_1P_2P_3...P_N$) un polygone sphérique convexe à (N+1) sommets, sa convexité permet de le découper en (N-1) triangles à partir du sommet P_0 (cf figure 31) en les appelant T_i(i=1..N-1) : T_1 a pour angles $\alpha_{0,1}$, α_1 , $\alpha_{2,1}$, $T_1=P_0P_1P_2$

T_k a pour angles $\alpha_{0,k}$, $\alpha_{k,2}$, $\alpha_{k+1,1}$ pour k=2..N-2, $T_k=P_0P_kP_{k+1}$

T_{N-1} a pour angles $\alpha_{0,N-1}$, $\alpha_{N-1,2}$, α_N, $T_{N-1}=P_0P_{N-1}P_N$

α_i étant l'angle en P_i et : $\alpha_0 = \sum_{i=1}^{N-1}\alpha_{0,i}$ et $\alpha_k = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}$ pour k=2..N-2

d'où: $Aire(P_0P_1...P_N) = \sum_{i=1}^{N-1} Aire(T_i)$

$$\sum_{i=1}^{N-1} Aire(T_i) = r^2(\alpha_1 + \alpha_{2,1} + \alpha_{0,1} - \pi) + \sum_{i=2}^{N-2} r^2(\alpha_{0,i} + \alpha_{i,2} + \alpha_{i+1,1} - \pi) + r^2(\alpha_{0,N-1} + \alpha_{N-2,2} + \alpha_N - \pi)$$

$$Aire(P_0...P_N) = r^2(\alpha_1 + \sum_{i=1}^{N-1}\alpha_{0,i} + \sum_{k=2}^{N-1}(\alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}) + \alpha_N - (N-1)\pi) = r^2\left(\sum_{i=0}^{N}\alpha_i - (N-1)\pi\right)$$

CQFD

II.5.2 Autres formules

Formules 9, nouvelle loi des demi-côtés:
$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

ε:= α + β + γ - π
$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin(\beta-\frac{\varepsilon}{2})\sin(\gamma-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

(et permutations circulaires...)
$$\tan\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin(\alpha-\frac{\varepsilon}{2})}{\sin(\beta-\frac{\varepsilon}{2})\sin(\gamma-\frac{\varepsilon}{2})}}$$

Démonstration: dans les formules 6 des demi-côtés nous avions S := (α +β +γ)/2

donc $S=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\pi}{2}$ et: $\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}=\sqrt{\frac{-\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}-\alpha\right)}{\sin\beta\sin\gamma}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\beta\sin\gamma}}$

$$\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}=\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}-\beta\right)\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}-\gamma\right)}{\sin\beta\sin\gamma}}\qquad \tan\frac{a}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$$

CQFD

Formules 10, loi des demi-excès sphériques:
$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}{\cos\frac{c}{2}}\qquad \tan\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\sin\gamma}{1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cos\gamma}$$

Démonstration: les formules 9 donnent

$$\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\beta\sin\gamma}}\sqrt{\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\gamma}}\sqrt{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\gamma}\qquad (\text{ i })$$

$$\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\sqrt{\frac{\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\gamma-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\beta\sin\gamma}}\sqrt{\frac{\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\gamma-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\gamma}}\sqrt{\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\left(\alpha-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin\left(\beta-\frac{\varepsilon}{2}\right)}}=\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\sin\gamma}$$

(i) donne la première égalité, et en additionnant les deux précédentes on a:

$$\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\left(\gamma-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\cos\gamma\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\gamma}=\frac{\sin\gamma\cos\frac{\varepsilon}{2}}{\sin\gamma}=\cos\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\tan\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{2}}{\cos\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}\frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}\frac{\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\sin\gamma}{\left(1+\tan\frac{a}{2}\tan\frac{b}{2}\cos\gamma\right)}$$

CQFD

Formules 11, nouvelles lois des demi-excès sphériques:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\delta}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\qquad\qquad \cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

Démonstration:

On peut éliminer l'angle γ des formules 10 grâce aux formules:

$$\sin\gamma=\frac{2\delta}{\sin a\sin b}=\frac{2\delta}{4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}$$ (loi des déterminants)

et $$\cos\gamma=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}$$ (loi des cosinus)

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\delta}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}+\frac{\cos c-\cos a\cos b}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

or $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{c}{2}-1-\left(2\cos^2\frac{a}{2}-1\right)\left(2\cos^2\frac{b}{2}-1\right)}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}+\frac{2\cos^2\frac{c}{2}-1-4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}+2\cos^2\frac{a}{2}+2\cos^2\frac{b}{2}-1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}-\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}+\frac{\cos^2\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}=\frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

CQFD

Formule de Héron pour le triangle sphérique : Soit ABC triangle sur la sphère S_r (de rayon r), on a: $$Aire(ABC)=2r^2\arccos\frac{\cos^2\frac{a}{2r}+\cos^2\frac{b}{2r}+\cos^2\frac{c}{2r}-1}{2\cos\frac{a}{2r}\cos\frac{b}{2r}\cos\frac{c}{2r}}$$

Démonstration: sur S_r le côté [BC] du triangle ayant pour longueur a, l'angle facial correspondant mesure a/r, de même pour chaque côté du triangle. La formule de Girard et la seconde formule des formules 11 donne:

$$Aire(ABC)=2r^2\frac{\varepsilon}{2}=2r^2\arccos\frac{\cos^2\frac{a}{2r}+\cos^2\frac{b}{2r}+\cos^2\frac{c}{2r}-1}{2\cos\frac{a}{2r}\cos\frac{b}{2r}\cos\frac{c}{2r}}$$

comme $0<\frac{\varepsilon}{2}<\pi$, $\frac{\varepsilon}{2}$ est entièrement déterminé par la fonction arccos. CQFD

II.5.3 Formule de l'Huilier

La formule de l'Huilier exprime l'excès sphérique en fonction des côtés d'une manière plus élégante que la formule de Héron pour le triangle sphérique.

Formule de l'Huilier: $\tan\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}}$ avec $p=\frac{a+b+c}{2}$

Démonstration: $0<\frac{\varepsilon}{4}<\frac{\pi}{2}$ donc sinus et cosinus seront positifs, on a:

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \text{ et } \cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}+1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$$\cos\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

travaillons les numérateurs de ces deux expressions:

$$\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-1=\frac{1}{2}(1+\cos a)+\frac{1}{2}(1+\cos b)-1 \qquad \text{car } \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos(2x))$$

$$\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-1=\frac{1}{2}(\cos a+\cos b)$$

$$\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-1=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2} \qquad \text{car } 2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

$$\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-1=\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)$$

$$\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-1=\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}$$

alors pour le numérateur de $\sin\frac{\varepsilon}{4}$ on a:

$$\begin{aligned}2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}-\cos^2\frac{c}{2}-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}+1&=\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}-\left(\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)^2\\&=\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}-\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)\\&=\left(\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}\right)\end{aligned}$$

$\cos(x-y)-\cos(x+y)=2\sin x\sin y$ d'où: $\cos\frac{c}{2}-\cos\frac{a+b}{2}=2\sin\frac{a+b-c}{4}\sin\frac{a+b+c}{4}$

$$\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}=2\sin\frac{-a+b+c}{4}\sin\frac{a-b+c}{4}$$

$$\sin\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{4}\sin\frac{-a+b+c}{4}\sin\frac{a-b+c}{4}\sin\frac{a+b-c}{4}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{2}\sin\frac{p-a}{2}\sin\frac{p-b}{2}\sin\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

pour le numérateur de $\cos\frac{\varepsilon}{4}$ on a:

$$\begin{aligned}2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\cos^2\frac{c}{2}+\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}-1&=\left(\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)^2-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\\&=\left(\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\right)\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\right)\\&=\left(\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}\right)\left(\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}\right)\end{aligned}$$

$\cos(x-y)+\cos(x+y)=2\cos x\cos y$ d'où: $\cos\frac{c}{2}+\cos\frac{a+b}{2}=2\cos\frac{a+b-c}{4}\cos\frac{a+b+c}{4}$

$$\cos\frac{a-b}{2}+\cos\frac{c}{2}=2\cos\frac{-a+b+c}{4}\cos\frac{a-b+c}{4}$$

$$\cos\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\frac{\cos\frac{a+b+c}{4}\cos\frac{-a+b+c}{4}\cos\frac{a-b+c}{4}\cos\frac{a+b-c}{4}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}=\sqrt{\frac{\cos\frac{p}{2}\cos\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-b}{2}\cos\frac{p-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}}$$

$\cos\frac{\varepsilon}{4}\neq 0$ car d'après les conditions d'existence du triangle sphérique en fonction de ses côtés on a: $0<a+b+c<2\pi$; $0<-a+b+c<2\pi$; $0<a-b+c<2\pi$; $0<a+b-c<2\pi$

et enfin: $\tan\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\sin\frac{\varepsilon}{4}}{\cos\frac{\varepsilon}{4}}=\sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}}$ CQFD

II.6 Résolutions systématiques

L'ensemble des formules établies jusqu'ici vont nous permettre de résoudre tous les problèmes élémentaires de la trigonométrie sphérique, à savoir, connaissant trois éléments d'un triangle sphérique (parmi ses angles et ses côtés) tenter de déterminer les autres.

II.6.1 Résolution d'un triangle sphérique dans lequel on connaît les trois angles

Connaissant α, β et γ le problème admet une solution si et seulement si $\alpha+\gamma<\pi+\beta$, $\beta+\alpha<\pi+\gamma$, $\beta+\gamma<\pi+\alpha$ et $\pi<\alpha+\beta+\gamma$. On a alors: $a=\arccos\frac{\cos\alpha+\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$

$$b=\arccos\frac{\cos\beta+\cos\gamma\cos\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha} \qquad c=\arccos\frac{\cos\gamma+\cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}$$

Démonstration: les conditions d'existence du triangle sphérique en fonction de ses angles ont déjà été déterminées et la loi des cosinus pour les angles donne: $\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$ et permutations circulaires, les côtés sont donc parfaitement déterminés. CQFD

II.6.2 Résolution d'un triangle sphérique dans lequel on connaît les trois côtés

Connaissant a, b et c le problème admet une solution si et seulement si $|b-c|<a<b+c$ et a + b + c < 2π. On a alors: $\alpha=\arccos\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$

$$\beta=\arccos\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a} \qquad \gamma=\arccos\frac{\cos c-\cos b\cos a}{\sin b\sin a}$$

Démonstration: les conditions d'existence du triangle sphérique en fonction de ses côtés ont déjà été déterminées et la loi des cosinus pour les côtés donne: $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$ et permutations circulaires, les côtés sont donc parfaitement déterminés. CQFD

II.6.3 Résolution d'un triangle sphérique dans lequel on connaît deux côtés et l'angle compris.

Connaissant a, b, et γ le problème admet toujours une solution unique:

$$\alpha=\arg\cot\frac{\cot a\sin b-\cos b\cos\gamma}{\sin\gamma} \qquad \beta=\arg\cot\frac{\cot b\sin a-\cos a\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

$$c=\arccos\left(\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma\right)$$

Démonstration:
Existence:A,B et C étant les points définit en coordonnées sphériques par C=(1;0;0), B=(1;a;0) et A=(1;b;γ) (cf fig 25) le triangle ABC répond au problème.
Unicité:les lois des cotangentes donnent: cot a sin b - cot α sin γ = cos b cos γ
cot b sin a - cot β sin γ = cos a cos γ
et la loi des cosinus pour les côtés donne: $\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$
qui déterminent entièrement α, β et c. CQFD

II.6.4 Résolution d'un triangle sphérique dans lequel on connaît deux angles et le côté compris

Connaissant α, β, et c le problème admet toujours une solution unique:

$$a = \arg\cot \frac{\cot\alpha \sin\beta + \cos\beta\cos c}{\sin c} \qquad b = \arg\cot \frac{\cot\beta \sin\alpha + \cos\alpha\cos c}{\sin c}$$

$$\gamma = \arccos\left(-\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c\right)$$

Démonstration:

Existence:on sait que le triangle A'B'C' ayant pour longueur de ses côtés $a' = \pi - \alpha$, $b' = \pi - \beta$ et d'angle compris entre ces deux côtés $\gamma' = \pi - c$ existe (cf précédemment), donc le triangle ABC polaire de A'B'C' existe et a pour angles α et β et pour côté c.

Unicité:les lois des cotangentes donnent: cot a sin c - cot α sin β = cos c cos β

cot b sin c - cot β sin α = cos c cos α

et la loi des cosinus pour les angles donne: $\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\cos c$

qui déterminent entièrement α, β et c. CQFD

II.6.5 Résolution d'un triangle sphérique dans lequel on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un deux

Connaissant a, b et α, dans certains cas le problème peut être résolu en posant:

$$M = \arcsin\frac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}; M' = \pi - M; Q = \arccos\frac{\cos a}{\cos b}; P = \arccos\left(\frac{\cos a}{\cos b}\frac{\sin b}{\sin a}\right)$$

$$N = 2\arg\cot\frac{\tan\frac{\alpha - M}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}; N' = 2\arg\cot\frac{\tan\frac{\alpha - M'}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}; N'' = 2\arg\cot(\tan\alpha\cos a)$$

$$O = 2\arctan\frac{\tan\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha+M}{2}}{\sin\frac{\alpha-M}{2}}; O' = 2\arctan\frac{\tan\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha+M'}{2}}{\sin\frac{\alpha-M'}{2}}; O'' = 2\arctan(\tan a\cos\alpha)$$

$$\alpha<\frac{\pi}{2}\begin{cases} b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ deux solutions possibles: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ;c=O ou } \beta=M'\text{; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \\ a=b \text{ une unique solution: } \beta\text{=}\alpha \text{ ; } \gamma=N''\text{ ; c=O''} \\ b<a<\pi-b \text{ une unique solution: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ; c=O} \\ \pi-b\le a \text{ aucune solution} \end{cases} \\ b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<b \text{ deux solutions possibles: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ; c=O ou } \beta\text{=M'; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \\ b\le a \text{ aucune solution} \end{cases} \\ b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a<\pi-b \text{ deux solutions possibles: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ; c=O ou } \beta\text{=M'; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \\ \pi-b\le a<b \text{ une unique solution: } \beta\text{=M'; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \\ b\le a \text{ aucune solution} \end{cases} \end{cases}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{2}\begin{cases} b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a\le b \text{ aucune solution} \\ b<a<\pi-b \text{ une unique solution: } \beta=M;\gamma=P;c=\text{Q} \\ a\le\pi-b \text{ aucune solution} \end{cases} \\ b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a=b \text{ une infinité de solutions: } \beta\text{=}\pi/2;c=\gamma \\ a\ne b \text{ aucune solution} \end{cases} \\ b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a\le\pi-b \text{ aucune solution} \\ \pi-b<a<b \text{ une unique solution: } \beta\text{=M';}\gamma\text{=P;c=Q} \\ b\le a \text{ aucune solution} \end{cases} \end{cases}$$

$$\alpha>\frac{\pi}{2}\begin{cases} b<\frac{\pi}{2}\begin{cases} a\le b \text{ aucune solution} \\ b<a\le\pi-b \text{ une unique solution: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ; c=O} \\ \pi-b<a \text{ deux solutions possibles: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ; c=O ou } \beta\text{=M'; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \end{cases} \\ b=\frac{\pi}{2}\begin{cases} a\le b \text{ aucune solution} \\ b<a \text{ deux solutions possibles: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ; c=O ou } \beta\text{=M'; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \end{cases} \\ b>\frac{\pi}{2}\begin{cases} a\le\pi-b \text{ aucune solution} \\ \pi-b<a<b \text{ une unique solution: } \beta\text{=M'; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \\ a=b \text{ une unique solution: } \beta\text{=}\alpha \text{ ; } \gamma=N''\text{ et c=O''} \\ \text{b<a deux solutions possibles: } \beta\text{=M; } \gamma\text{=N ; c=O ou } \beta\text{=M'; } \gamma\text{=N' ; c=O'} \end{cases} \end{cases}$$

Démonstration: le cas $\alpha=\pi/2$ a déjà été traité dans la partie consacrée au triangle sphérique rectangle.

Pour le cas $\alpha\ne\pi/2$ on utilise les formules: $\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\alpha}{\sin a}$ et les analogies de Napier

1) si $a\ne b$: $\cot\frac{\gamma}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}$ (*) et $\tan\frac{c}{2}=\frac{\tan\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$ (**)

(**) bien définie car $\alpha=\beta\Rightarrow\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos S\cos(\alpha-S)}{\sin\beta\sin\gamma}}=\sin\frac{b}{2}\Rightarrow a=b$ donc $a\neq b\Rightarrow\alpha\neq\beta$

$\sin\beta=\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}$ donne deux valeurs pour β si et seulement si: $\sin b\sin\alpha\leq\sin a$

(*) et (**) sont possibles si et seulement si $\begin{cases}\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{a-b}{2}>0\\ \tan\frac{a-b}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow(\alpha-\beta)(a-b)>0$

Montrons que cette dernière condition est suffisante pour l'existence du triangle:

$(\alpha-\beta)(a-b)>0\Rightarrow\exists\gamma=2\operatorname{arg\,cot}\frac{\tan\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}}\in\left]0;\pi\right[\Rightarrow$ le triangle sphérique définit par a,b,γ existe toujours et on a: $\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\alpha}{\sin a}$

Nous pouvons alors étudier les différents cas de figure, soient (quand ils existent): $M=\arcsin\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}$ et $M'=\pi-\arcsin\frac{\sin b\sin\alpha}{\sin a}$

i) si $\alpha<\pi/2$ et $b<\pi/2$

_ si a-b<0 alors sin a <sin b ⇒ $1<\frac{\sin b}{\sin a}$ ⇒ sin α < sin β ⇒ α-M<0 possible

et par ailleurs $M'\geq\pi/2>\alpha$ donc α-M'<0. Les deux valeurs M et M' sont possibles pour β: on a deux solutions (distinctes sauf si: sin b sin α = sin a)

_ si a-b>0, trois cas sont possibles:

a) b<π-a alors sin b < sin a ⇒ sin β < sin α ⇒ α-M>0 possible

Par contre $M'\geq\pi/2>\alpha$ donc α-M'<0 impossible on a donc une seule solution: β=M

b) b=π-a ⇒ sin a = sin b ⇒ α=M impossible et M'>α donc aussi impossible. On a donc aucune solution dans ce cas.

c) b>π-a alors sin b > sin a ⇒ sin α < sin β ⇒ α-M<0 impossible et M'>α donc aussi impossible. On a donc aucune solution dans ce cas.

ii) si $\alpha<\pi/2$ et $b=\pi/2$

_ si a-b<0 alors sin b > sin a ⇒ sin β > sin α ⇒ α-M<0 possible

par ailleurs α-M'<0 donc aussi possible; on a deux solutions β=M ou β=M'

_ a-b>0 alors sin b > sin a ⇒ sin β > sin α ⇒ α-M<0 impossible

par ailleurs α-M'<0 donc impossible; aucune solution dans ce cas.

iii)si $\alpha<\pi/2$ et $b>\pi/2$

_ si a-b>0 alors sin a <sin b ⇒ sin α < sin β ⇒ α-M<0 impossible

et par ailleurs $M'\geq\pi/2>\alpha$ donc α-M'<0 impossible; aucune solution dans ce cas.

_ si a-b<0, trois cas sont possibles:

a) a<π-b alors sin b > sin a ⇒ sin β > sin α ⇒ α-M<0 possible

A fortiori α-M'<0 possible on a donc deux solutions: β=M ou β=M'

b) a=π-b ⇒ sin a = sin b ⇒ α=M impossible mais M'>α donc possible. On a donc une unique solution dans ce cas: β=M'

c) a>π-b alors sin b < sin a ⇒ sin α > sin β ⇒ α-M>0 impossible et par ailleurs M'>α donc possible. On a donc une unique solution dans ce cas: β=M'

iv) si $\alpha > \pi/2$ et $b < \pi/2$

_ si a-b<0 alors sin a <sin b ⇒ sin α < sin β ⇒ α-M'>0 impossible et par ailleurs $M \le \pi/2 < \alpha$ donc α-M>0 impossible. On a donc pas de solution dans ce cas.

_ si a-b>0, trois cas sont possibles:

a) a<π-b alors sin b < sin a ⇒ sin β < sin α ⇒ α-M'<0 impossible Par contre $M \le \pi/2 < \alpha$ donc α-M>0 possible on a donc une seule solution: β=M

b) a=π-b ⇒ sin a = sin b ⇒ α=M' impossible par ailleurs M<α donc aussi possible. On a donc une unique solution dans ce cas: β=M

c) a>π-b alors sin b > sin a ⇒ sin α < sin β ⇒ α-M'>0 possible et M>α donc aussi possible. On a donc deux solutions dans ce cas: β=M ou β=M'

v) si $\alpha > \pi/2$ et $b = \pi/2$

_ si a-b<0 alors sin b > sin a ⇒ sin β > sin α ⇒ α-M'>0 impossible par ailleurs α-M>0 donc aussi impossible; on a aucune solution dans ce cas.

_ a-b>0 alors sin b > sin a ⇒ sin β > sin α ⇒ α-M'>0 possible par ailleurs α-M>0 donc possible; on a donc deux solutions dans ce cas: β=M ou β=M'

vi) si $\alpha > \pi/2$ et $b > \pi/2$

_ si a-b>0 alors sin a <sin b ⇒ sin α < sin β ⇒ α-M'>0 possible et par ailleurs $M \le \pi/2 < \alpha$ donc α-M>0 possible; deux solutions dans ce cas: β=M ou β=M'

_ si a-b<0, trois cas sont possibles:

a) a<π-b alors sin b > sin a ⇒ sin β > sin α ⇒ α-M'>0 impossible Par ailleurs α-M>0 impossible on a donc aucune solution dans ce cas

b) a=π-b ⇒ sin a = sin b ⇒ α=M' impossible et M<α donc impossible. On a donc aucune solution dans ce cas.

c) a>π-b alors sin b < sin a ⇒ sin α > sin β ⇒ α-M'<0 possible et par ailleurs M<α donc impossible. On a donc une unique solution dans ce cas: β=M'

2) si a=b : les formules des demi-angles donnent $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}} = \cos\frac{\beta}{2}$ donc α=β

i) si $a = \pi/2$ le triangle polaire A'B'C' du triangle ABC est birectangle en A' et B' et isocèle car a'=b' donc l'étude des triangles sphériques rectangles donne a'=b'=π/2 et γ' = c'. On a donc $\alpha = \beta = \pi/2$ et γ=c.

ii) si $a \ne \pi/2$ les formules de Napier donnent $\cot\frac{\gamma}{2} = \tan\alpha\cos a$ et $\tan\frac{c}{2} = \tan a\cos\alpha$

problème possible si et seulement si $\begin{cases}\tan\alpha\cos a > 0\\ \tan a\cos\alpha > 0\end{cases}$ ⇔ a et α=β sont dans le même quadrant

CQFD

II.6.6 Résolution d'un triangle sphérique dans lequel on connaît deux angles et le côté opposé à l'un deux

Connaissant α, β et a, on résout (par le critère précédent) son triangle polaire connaissant $a'=\pi-\alpha$, $b'=\pi-\beta$ et $\alpha'=\pi-a$ puis on a: $b=\pi-\beta'$, $c=\pi-\gamma'$ et $\gamma=\pi-c'$

Démonstration: si le triangle sphérique A'B'C' définit par $a'=\pi-\alpha$, $b'=\pi-\beta$ et $\alpha'=\pi-a$ existe alors le triangle sphérique ABC, polaire de A'B'C' existe et vérifie les conditions: $\alpha=\pi-a'$, $\beta=\pi-b'$, $a=\pi-\alpha'$, $b=\pi-\beta'$, $c=\pi-\gamma'$ et $\gamma=\pi-c'$. CQFD

II.7 Autres résolutions:

Les formules développées précédemment permettent aussi de résoudre des triangles sphériques en connaissant un angle , un côté et la somme ou la différence des deux autres côtés. Deux cas de figure sont alors à considérer: l'angle et le côté donnés sont opposés ou non.

Sont donnés α, a, et b+c les solutions existent si et seulement si les formules suivantes ont un sens (il faut au moins a<b+c<2π-a) on a alors, deux solutions:

$$\begin{cases}\beta = \arccos\left(\dfrac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)+\arccos\left(\dfrac{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\\ \gamma = \arccos\left(\dfrac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)-\arccos\left(\dfrac{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\end{cases} \text{ou}$$

$$\begin{cases}\beta = \arccos\left(\dfrac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)-\arccos\left(\dfrac{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\\ \gamma = \arccos\left(\dfrac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)+\arccos\left(\dfrac{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\end{cases}$$

Sont donnés α, a, et b-c les solutions existent si et seulement si les formules suivantes ont un sens (il faut au moins -a<b-c<a) on a alors, deux solutions:

$$\begin{cases}\beta = \arcsin\left(\dfrac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)+\arcsin\left(\dfrac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\\ \gamma = \arcsin\left(\dfrac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)-\arcsin\left(\dfrac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\end{cases} \text{ou}$$

$$\begin{cases}\beta = \dfrac{\pi}{2}-\arcsin\left(\dfrac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)+\arcsin\left(\dfrac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\\ \gamma = \dfrac{\pi}{2}-\arcsin\left(\dfrac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)-\arcsin\left(\dfrac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\end{cases}$$

Démonstration:
1) on connaît b+c: les formules de Delambre donnent (sachant que 0<β+γ<2π et -π<β-γ<π) :

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\Rightarrow\beta+\gamma=2\arccos\left(\frac{\cos\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)$$

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\Rightarrow\beta-\gamma=\pm2\arccos\left(\frac{\sin\frac{b+c}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)$$

2) on connaît b-c: $\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$

$$\Rightarrow\beta+\gamma=2\arcsin\left(\frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)\quad\text{ou bien}\quad\beta+\gamma=\pi-2\arcsin\left(\frac{\cos\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\right)$$

$$\sin\frac{\beta-\gamma}{2}=\frac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\Rightarrow\beta-\gamma=2\arcsin\left(\frac{\sin\frac{b-c}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)$$

Dans les deux cas on connaît alors le côté a et les deux angles le bordant ce qui détermine complètement le triangle. CQFD

> Sont donnés α, c et a+b (ou a-b) le problème est possible si et seulement si les formules suivantes ont un sens, on a alors en posant $x=\cos\alpha\sin(a+b)-\sin c$, $y=\sin\alpha\cos c\sin(a+b)$, $z=\cos\alpha\sin c-\sin(a+b)$ (ou pour a-b $x=-\cos\alpha\sin(a+b)-\sin c$, $y=-\sin\alpha\cos c\sin(a+b)$, $z=-\cos\alpha\sin c-\sin(a+b)$):
>
> $$\beta=\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)-\arg(x+iy)$$

Démonstration:
Les formules de Delambre donnent connaissant a+b:

$$\left.\begin{aligned}\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}&=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}\\ \cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}&=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\sin^2\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow(1-\cos\gamma)\sin(a+b)=(\cos\alpha+\cos\beta)\sin c$$

or $\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$

donc $(1+\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cos c)\sin(a+b)=(\cos\alpha+\cos\beta)\sin c$

$$\cos\beta(\cos\alpha\sin(a+b)-\sin c)-\sin\beta(\sin\alpha\cos c\sin(a+b))=\cos\alpha\sin c-\sin(a+b)$$

Soient $x=\cos\alpha\sin(a+b)-\sin c$, $y=\sin\alpha\cos c\sin(a+b)$, $z=\cos\alpha\sin c-\sin(a+b)$

on a $\operatorname{Re}(e^{i\beta}(x+iy)) = z = \sqrt{x^2+y^2}\cos(\beta+\arg(x+iy))$

Le problème est donc possible dés que $\dfrac{|z|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq 1$ car une fois β déterminé on connaît c et les deux angles le bordant ce qui détermine complètement le triangle.

Connaissant a-b

$$\left.\begin{array}{l} \sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} = \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sin\dfrac{c}{2} \\ \cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2} = \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{c}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos^2\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$\Rightarrow (1+\cos\gamma)\sin(a+b) = (\cos\beta-\cos\alpha)\sin c$$

$$\Rightarrow (1-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c)\sin(a+b) = (-\cos\alpha+\cos\beta)\sin c$$

$$\cos\beta(-\cos\alpha\sin(a+b)-\sin c)+\sin\beta(\sin\alpha\cos c\sin(a+b)) = -\cos\alpha\sin c-\sin(a+b)$$

puis on résout de façon analogue au cas a+b CQFD

III Comparaison avec le triangle du plan

III.1. Cas d'isométrie de deux triangles sphériques

Après avoir étudié les différents cas de résolutions nous pouvons comparer les cas d'isométries des triangles sphériques et euclidiens.

Théorème: Soient ABC et A'B'C', deux triangles sphériques d'éléments respectifs: $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ et $a',b',c',\alpha',\beta',\gamma'$. Alors il existe une isométrie de la sphère sur elle-même transformant ABC en A'B'C' $\Leftrightarrow$ (i) $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$
$\Leftrightarrow$ (ii) $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $\gamma=\gamma'$
$\Leftrightarrow$ (iii) $a=a'$, $b=b'$, $\gamma=\gamma'$
$\Leftrightarrow$ (iv) $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $c=c'$ (ainsi que toutes les permutations)

Démonstration:

On va en fait montrer que lorsque les trois côtés (les trois angles, deux côtés et l'angle inscrit ou encore deux angles et le côté compris entre ces deux angles) du triangle sont donnés, alors ce triangle est déterminé de façon unique. Ainsi, deux triangles vérifiant l'une des quatre propriétés énoncées seront à fortiori isométriques.

De plus s'il existe une isométrie entre deux triangles, alors les quatre propriétés énoncées sont évidemment vérifiées.

Etant donné que l'on sait résoudre un triangle sphérique de façon unique lorsque sont donnés ses trois côtés ou ses trois angles (résolutions qui sont polaires l'une de l'autre), alors:
(i) ou (ii) $\Rightarrow$ ABC et A'B'C' sont isométriques.

(iii) nous donne l'égalité entre deux côtés et l'angle inscrit. Or on a vu qu'un triangle est déterminé de façon unique par deux de ces côtés et l'angle inscrit, ainsi:
(iii) $\Rightarrow$ ABC et A'B'C' sont isométriques.

De la même façon (iv) nous donne l'égalité entre deux angles et le côté compris entre ces angles, or la donnée de ces trois éléments détermine de manière unique un triangle, ainsi:
(iv) $\Rightarrow$ ABC et A'B'C' sont isométriques. CQFD.

Remarque: Il existe d'autres cas d'isométrie entre deux triangles sphériques, mais ceux-ci nécessitent des conditions sur les angles et les côtés. En effet, si on se réfère à la résolution d'un triangle connaissant deux de ses côtés et un angle opposé à l'un d'eux, alors ce triangle est déterminé de façon unique dans huit cas différents selon les valeurs et les relations entre les éléments donnés. De même, on a le cas polaire: si deux angles du triangle et un côté opposé à l'un d'eux sont donnés, alors le triangle est déterminé de façon unique sous certaines conditions sur les éléments donnés et les relations qui les lient.

Comparaison entre les isométries d'un triangle sphérique et celles d'un triangle du plan euclidien: on rappelle que dans le plan euclidien
ABC et A'B'C' sont isométriques $\Leftrightarrow a=a', b=b', c=c' \Leftrightarrow \alpha=\alpha', \beta=\beta', c=c' \Leftrightarrow \alpha=\alpha', b=b', c=c'$
On rappelle aussi que si l'on donne deux côtés et un angle opposé à l'un d'eux alors dans le plan euclidien il peut exister deux triangles vérifiant ces données. Si l'on donne deux angles et un côté opposé à l'un d'eux, dans le cas euclidien on connait le troisième angle donc le triangle est bien déterminé (on se ramène à deux angles et le côté compris). Pour finir si on donne les valeurs des trois angles, alors il existe une infinité de triangles du plan euclidien ayant ces angles, et ces triangles sont tous semblables.

cas de figures envisageables:	triangles sphériques	triangles euclidiens
3 côtés égaux 2 à 2	isométrie	isométrie
3 angles égaux 2 à 2	isométrie	similitude
2 angles et le côté compris	isométrie	isométrie
2 côtés et l'angle inscrit	isométrie	isométrie
2 côtés et un angle opposé à l'un d'eux	isométrie sous conditions	pas d'isométrie
2 angles et un côté opposé à l'un d'eux	isométrie sous conditions	isométrie

III.2 Quelques propriétés des triangles isocèles et équilatéraux

Nous pouvons aussi comparer quelques propriétés des triangles sphériques isocèles et équilatéraux avec le cas euclidien.

Triangle isocèle:
Pour qu'un triangle sphérique soit isocèle en A (i.e. b=c), il faut et il suffit que $\beta=\gamma$.

Démonstration:
1)On suppose b=c, alors

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \cos\gamma \Rightarrow \beta = \gamma$$

2)De même si on suppose $\beta=\gamma$, alors:

$$\cos b = \frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta\sin\alpha} = \cos c \Rightarrow b = c$$ CQFD.

Propriété: un triangle est équilatéral (i.e. a=b=c) si et seulement si $\alpha = \beta = \gamma$.

Démonstration:
Si on a a=b=c, alors ABC est isocèle en A, et donc $\beta = \gamma$,mais ABC est aussi isocèle en B et donc $\alpha = \gamma$.Ainsi on a bien $\alpha = \beta = \gamma$.
Réciproquement si $\alpha = \beta = \gamma$,alors ABC est isocèle en A, et donc b=c, mais il est aussi isocèle en B et donc a=c. Ainsi on a a=b=c. CQFD.

Remarques: Un triangle étant isocèle si et seulement si il a deux de ses angles égaux, alors le triangle polaire d'un triangle isocèle est isocèle et le triangle polaire d'un triangle équilatéral est équilatéral.

Dans le plan euclidien, la somme des trois angles d'un triangle est π, donc un triangle équilatéral a ses trois angles égaux à $\pi/3$. Ce n'est pas le cas dans un triangle sphérique équilatéral: sur la sphère on a la relation: $\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi$ donc dans un triangle équilatéral sphérique chaque angle vérifie la relation: $\pi/3 < \alpha < \pi$. On a même $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi + \varepsilon}{3}$ donc tous les triangles sphériques équilatéraux n'ont pas les mêmes angles.

III.3 Equivalents des médiatrices, bissectrices, hauteurs et médianes

Par analogie avec le plan euclidien on peut définir pour la géométrie sphérique l'équivalent de la médiatrice d'un segment, de la bissectrice d'un angle, et des médianes et hauteurs d'un triangle. Nous pourrons ensuite étudier les propriétés de ses éléments.

<u>Définitions</u>:

_ **la médiatrice sphérique** (cf. figure 39) d'un segment [AB] sur la sphère est la droite sphérique formant un angle droit avec (AB) et le coupant en son milieu. Notion cohérente car la droite ainsi construite est l'intersection du plan médiateur du segment [AB] (de $\mathbb{R}^3$) avec la sphère S² donc c'est aussi l'ensemble $\left\{M \in S^2 / MA = MB\right\} = \left\{M \in S^2 / \prec AOM = \prec MOB\right\}$ (car les triangles euclidiens AOM et BOM sont isométriques)

_ **la bissectrice sphérique** (intérieure) d'un angle $\prec$BAC (cf figure 40) est la droite (AD) telle que $\prec$BAD=$\prec$DAC, ainsi on peut la définir par l'intersection du plan (OAD) (séparant l'angle dièdre B-OA-C en deux angles tels que B-OA-D=D-OA-C) et de la sphère S², c'est-à-dire l'ensemble $S^2 \cap \left\{M \in \mathbb{R}^3 / OM.\left(\frac{OA \wedge OC}{\|OA \wedge OC\|} + \frac{OA \wedge OB}{\|OA \wedge OB\|}\right) = 0\right\}$. Ainsi la bissectrice sphérique de l'angle $\prec$BAC est toujours définie: si elle ne l'était pas on aurait

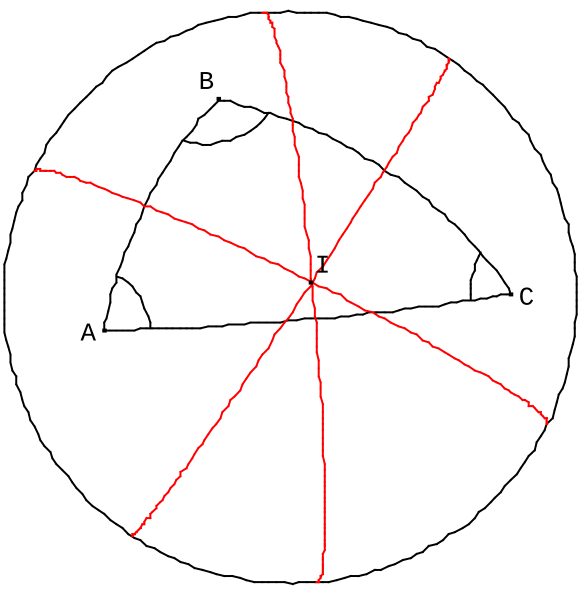
$$\frac{OA \wedge OC}{\|OA \wedge OC\|} + \frac{OA \wedge OB}{\|OA \wedge OB\|} = \vec{0} \Rightarrow OA \wedge \left(\frac{OC}{\|OA \wedge OC\|} + \frac{OB}{\|OA \wedge OB\|}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{R} : kOA = \frac{OC}{\|OA \wedge OC\|} + \frac{OB}{\|OA \wedge OB\|} \text{ ou bien } \frac{OC}{\|OA \wedge OC\|} = -\frac{OB}{\|OA \wedge OB\|}$$

ce qui est impossible car dans le triangle sphérique ABC, OA, OB et OC sont libres. La **bissectrice sphérique extérieure** de l'angle $\prec$BAC est la droite sphérique passant par A et formant un angle droit avec (AD).

_ dans un triangle sphérique ABC, **la hauteur sphérique** (cf figure 41) issue de A est la droite sphérique formant un angle droit avec (BC) et passant par A, c'est donc aussi $S^2 \cap Vect(OC \wedge OB; OA)$. Ainsi la hauteur sphérique issue de A est définie $\Leftrightarrow$ $OC \wedge OB$ et OA sont non colinéaires $\Leftrightarrow$ A n'est pas un pôle de (BC) $\Leftrightarrow$ ABC n'est pas birectangle en B et C. Donc les trois hauteurs sphériques d'un triangle sphérique sont définies si et seulement si il n'est pas birectangle.

_ dans un triangle sphérique ABC, **la médiane sphérique** (cf figure 42) issue de A est le segment sphérique joignant A au milieu du segment sphérique [BC], c'est donc aussi $S^2 \cap Vect(OC + OB; OA)$. Elle est toujours définie car dans ABC, OA et OC+OB sont libres.



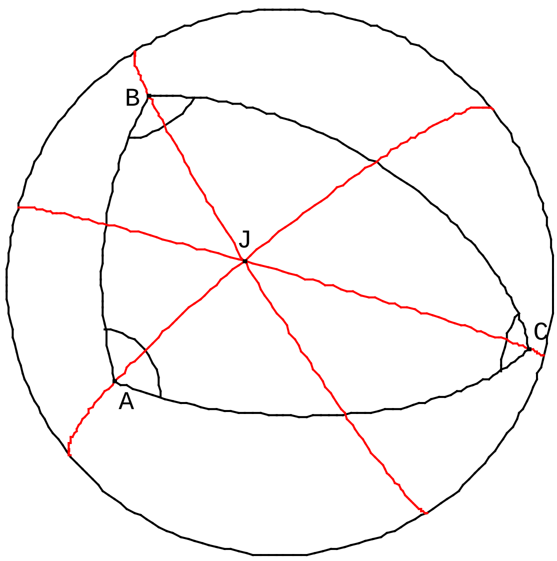


figure 39

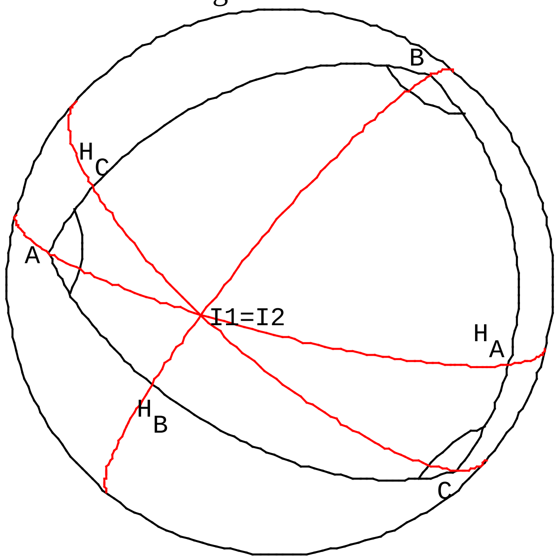


figure 41

figure 40

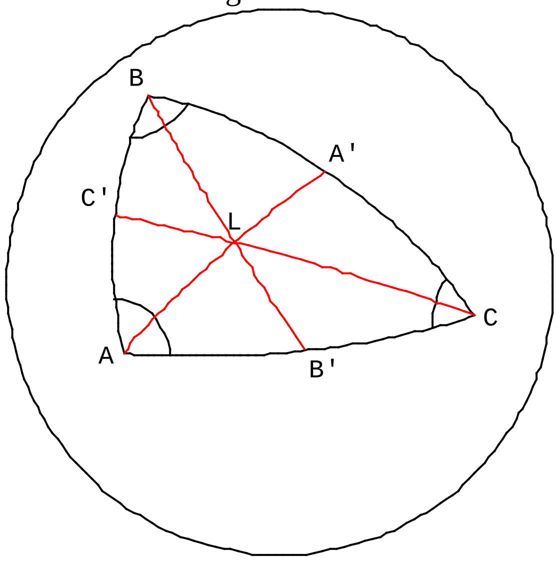


figure 42

Propriété: Dans un triangle sphérique, les médiatrices sphériques sont concourantes, les bissectrices sphériques sont concourantes, les hauteurs sphériques sont concourantes, et enfin les médianes sphériques sont concourantes.

Démonstration:

1) point de concours des médiatrices sphériques: Soit ABC un triangle sphérique

Dans le plan (ABC) les médiatrices du triangle ABC (euclidien) s'intersectent en I', soient P_{AB}, P_{BC} et P_{AC} les plans médiateurs de [AB], [BC] et [AC] , (O et I' ne peuvent être confondus car si c'était le cas A, B et C seraient sur un même grand cercle) on a:

$$O \in P_{AB} \cap P_{BC} \cap P_{AC} \text{ et } I' \in P_{AB} \cap P_{BC} \cap P_{AC} \text{ donc } (OI') \subset P_{AB} \cap P_{BC} \cap P_{AC}$$

soit $\{I, I''\} = (OI') \cap S^2$ tel que I soit dans le même hémisphère que le triangle sphérique ABC. On a bien $I \in S^2 \cap P_{AB} \cap P_{BC} \cap P_{AC}$ donc les médiatrices sphériques de ABC sont concourantes en I.

2) point de concours des bissectrices sphériques: Soit ABC un triangle sphérique

soit $\vec{u} = \|OB \wedge OC\| OA + \|OA \wedge OC\| OB + \|OA \wedge OB\| OC$ on a alors:

$$\vec{u}.\left(\frac{OA \wedge OC}{\|OA \wedge OC\|} + \frac{OA \wedge OB}{\|OA \wedge OB\|}\right) = OB.(OA \wedge OC) + OC.(OA \wedge OB) = OB.(OA \wedge OC) + OB.(OC \wedge OA) = 0$$

de même $\vec{u}.\left(\frac{OB \wedge OC}{\|OB \wedge OC\|} + \frac{OB \wedge OA}{\|OB \wedge OA\|}\right) = \vec{u}.\left(\frac{OC \wedge OA}{\|OC \wedge OA\|} + \frac{OC \wedge OB}{\|OC \wedge OB\|}\right) = 0$

donc $\vec{u}$ appartient aux trois plans contenant les bissectrices sphériques issues des trois angles de ABC alors $S^2 \cap Vect(\vec{u}) = \{J; J'\}$ et les trois bissectrices sont concourantes en J.

3) point de concours des hauteurs sphériques

Soit ABC un triangle sphérique non birectangle alors il existe un côté de longueur différente de π/2. Supposons $a \neq \pi/2$ alors on a: $OC.OB \neq 0$

Soit $\vec{v} = (OA.(OB \wedge OC))OA + \left(\frac{(OA.OB)(OA.OC)}{OC.OB} - 1\right) OB \wedge OC$

on a $\vec{v} \in Vect\left(OA, OB \wedge OC\right)$ et par ailleurs:

$$\vec{v}.OB \wedge \left(OC \wedge OA\right) = \left(OC \wedge OA\right).\left(\vec{v} \wedge OB\right)$$

$$= \left(OC.\vec{v}\right)\left(OA.OB\right) - \left(OC.OB\right)\left(OA.\vec{v}\right) \quad \text{(d'après l'identité de Lagrange)}$$

$$= \left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right)\left(OA.OC\right)\left(OA.OB\right) - \left(OC.OB\right)\left(OA.\left(OB \wedge OC\right) + \left(\frac{\left(OA.OB\right)\left(OA.OC\right)}{OC.OB} - 1\right)\left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right)\right.$$

$$= \left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right)\left(OA.OC\right)\left(OA.OB\right) - \left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right)\left(OA.OC\right)\left(OA.OB\right) = 0$$

donc $\vec{v} \in Vect\left(OB, OC \wedge OA\right)$

$$\vec{v}.OC \wedge \left(OA \wedge OB\right) = \left(OA \wedge OB\right).\left(\vec{v} \wedge OC\right)$$

$$= \left(OA.\vec{v}\right)\left(OB.OC\right) - \left(OA.OC\right)\left(OB.\vec{v}\right)$$

$$= \left(OA.\left(OB \wedge OC\right) + \left(\frac{\left(OA.OB\right)\left(OA.OC\right)}{OC.OB} - 1\right)\left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right)\right)\left(OB.OC\right) - \left(OA.OC\right)\left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right)\left(OB.OA\right.$$

$$= \left(OA.OB\right)\left(OA.OC\right)\left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right) - \left(OA.OB\right)\left(OA.OC\right)\left(OA.\left(OB \wedge OC\right)\right) = 0$$

donc $\vec{v} \in Vect\left(OC, OA \wedge OB\right)$

Ainsi $\vec{v}$ appartient aux trois plans contenant les trois hauteurs du triangle sphérique ABC, donc les deux points de $S^2 \cap Vect\left(\vec{v}\right)$ sont les points de concours de hauteurs sphériques de ABC.

4) point de concours des médianes sphériques: Soit ABC un triangle sphérique

Dans le plan (ABC) les médianes du triangle euclidien ABC s'intersectent en L'. La médiane issue de A coupe [BC] en son milieu A", alors $OA" = \frac{1}{2}(OB + OC)$ donc la médiane issue de A est incluse dans $P_A = Vect(OC + OB; OA)$. De même pour les deux autres médianes et les plans $P_B = Vect(OA + OC; OB)$ et $P_C = Vect(OA + OB; OC)$ donc $L' \in P_A \cap P_B \cap P_C$. Or $O \in P_A \cap P_B \cap P_C$. Soit $\{L, L"\} = (OL') \cap S^2$ tel que L soit dans le même hémisphère que le triangle sphérique ABC. On a bien $L \in S^2 \cap P_A \cap P_B \cap P_C$ donc les médianes sphériques de ABC sont concourantes en L. CQFD

Propriétés: dans un triangle sphérique ABC, soit L le point d'intersection des médianes sphériques, A' le milieu du segment [BC]. En notant a', a" , et a"' les longueurs des segments [AA'], [AL] et [LA'] on a: $\cos a' = \dfrac{\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$ et $\dfrac{\sin a"}{\sin a"'} = 2\cos\frac{a}{2}$

Démonstration:

dans le triangle sphérique AA'B soit m la mesure de l'angle en A', on a:

$$\cos b = \cos\frac{a}{2}\cos a' + \sin\frac{a}{2}\sin a' \cos m$$

dans le triangle sphérique AA'C:

$$\cos c = \cos\frac{a}{2}\cos a' + \sin\frac{a}{2}\sin a'\cos(\pi - m) = \cos\frac{a}{2}\cos a' - \sin\frac{a}{2}\sin a'\cos m$$

en additionnant les deux égalité il vient: $\cos b + \cos c = 2\cos\frac{a}{2}\cos a' = 2\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}$

Par ailleurs, dans le triangle sphérique ALC' : $\dfrac{\sin a''}{\sin \prec AC'C} = \dfrac{\sin\frac{c}{2}}{\sin \prec ALC'}$

dans le triangle sphérique CLA': $\dfrac{\sin a'''}{\sin \prec LCA'} = \dfrac{\sin\frac{a}{2}}{\sin \prec CLA'}$

dans CBC': $\dfrac{\sin\frac{c}{2}}{\sin \prec C'CB} = \dfrac{\sin a}{\sin \prec CC'B} \Rightarrow \sin \prec C'CB = \dfrac{\sin\frac{c}{2}\sin \prec CC'B}{\sin a}$

or $\prec CC'B = \pi - \prec LC'A$ et $\prec CLA' = \prec C'LA$ donc $\sin a''' = \dfrac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}\sin \prec LC'A}{\sin a \sin \prec C'LA}$ et

$\prec C'CB = \prec LCA'$, ainsi : $\dfrac{\sin a''}{\sin a'''} = \dfrac{\sin a}{\sin\frac{a}{2}} = \dfrac{2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\sin\frac{a}{2}} = 2\cos\frac{a}{2}$ CQFD.

On sait que dans un triangle euclidien la médiane issue d'un sommet partage le triangle en deux triangles d'aires égales. Nous pouvons étudier l'équivalent dans le triangle sphérique.

Propriété: dans un triangle sphérique la médiane sphérique issue d'un sommet partage le triangle sphérique en deux triangles sphériques d'aires non nécessairement égales.

Démonstration:

Soient ABC un triangle sphérique, A' le milieu de [BC] on note $\alpha' = mes(\prec AA'B)$ et $\alpha'' = mes(\prec A'AB)$. Soient A_1 et A_2 les aires des triangles sphériques ABA' et ACA' , supposons par l'absurde $A_1 = A_2 \Rightarrow \alpha'' + \alpha' + \beta - \pi = (\alpha - \alpha'') + (\pi - \alpha') + \gamma - \pi$

$$\Rightarrow 2(\alpha' + \alpha'') = \alpha - \beta + \gamma + \pi$$

Par ailleurs les analogies de Napier dans AA'B donnent: $\cos\dfrac{\alpha' + \alpha''}{2} = \dfrac{\cos\frac{a/2 + c}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{AA'}{2}}$

et d'après la dernière propriété: $\cos\dfrac{AA'}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}(\cos AA' + 1)} = \sqrt{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}} + 1\right)}$

On a donc: $\cos^2\dfrac{\alpha - \beta + \gamma + \pi}{4} = \dfrac{2\cos\frac{a}{2}\cos^2\frac{a/2 + c}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}\cos\frac{b-c}{2} + \cos\frac{a}{2}}$.

Ainsi dans le triangle ABC avec a=π/2, b=π/2 et c=π/3 ($\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2, \gamma = \pi/3$) on aurait:

$$\cos^2\frac{\pi}{3} = \frac{2\cos\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{7\pi}{24}\sin^2\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{5\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos^2\frac{7\pi}{24}\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \cos^2\frac{7\pi}{24} \quad \text{faux}$$

Donc la médiane issue de A ne sépare pas ABC en deux triangles de même aire. CQFD

Propriété: dans un triangle sphérique isocèle en A, la hauteur sphérique issue de A, la médiatrice sphérique du côté opposé, la médiane sphérique issue de A et la bissectrice sphérique de l'angle en A, sont confondues.

Démonstration:

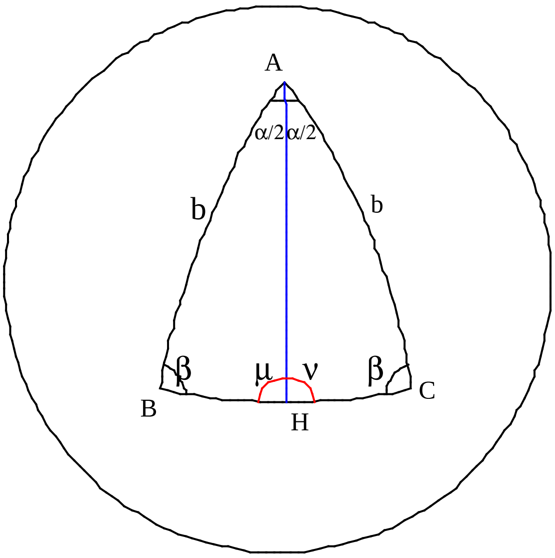


figure 43

Soit H, le point d'intersection de la bissectrice sphérique de l'angle α et du segment [BC]. On considère les deux triangles ABH et AHC, ces deux triangles ont deux côtés et l'angle inscrit (b=c, h et α/2) égaux, ils sont donc isométriques, on a ainsi: BH=HC=a/2.
Donc la bissectrice et la médiane issue de A sont confondues.
De plus: si on nomme μ=mes($\prec CHA$) et ν=mes($\prec AHB$) et si on utilise la formule des cosinus pour les angles dans les triangles ABH et AHC alors:

$$\cos\mu = -\cos(\alpha/2)\cos\gamma + \sin(\alpha/2)\sin\gamma\cos b = -\cos(\alpha/2)\cos\beta + \sin(\alpha/2)\sin\beta\cos c$$ On a
$$= \cos\nu$$

alors μ=ν et μ+ν=π , donc μ=ν=π/2.Ainsi, la droite (AH) est la hauteur sphérique issue de A; et comme cette droite coupe le segment [BC] perpendiculairement en son milieu, c'est aussi la médiatrice de [BC]. CQFD

<u>Remarque</u>: un triangle sphérique équilatéral étant isocèle en chacun de ses sommets, la hauteur sphérique issue d'un sommet, la médiane sphérique issue de ce même sommet, la bissectrice sphérique de l'angle de ce sommet et la médiatrice sphérique du côté opposé à ce

sommet sont confondues. Ainsi le point d'intersection des hauteurs sphériques, celui des médiatrices sphériques et celui des médianes sphériques sont confondus.

Soit ABC un triangle sphérique équilatéral, soit I le point d'intersection des bissectrices sphériques du triangle (qui sont aussi ses hauteurs, ses médiatrices et ses médianes). Soient a la mesure du côté du triangle, α la valeur de ses angles, et t la longueur du segment [AI] sur la sphère (cf figure 44). Alors on a la relation: $a < t\sqrt{3}$

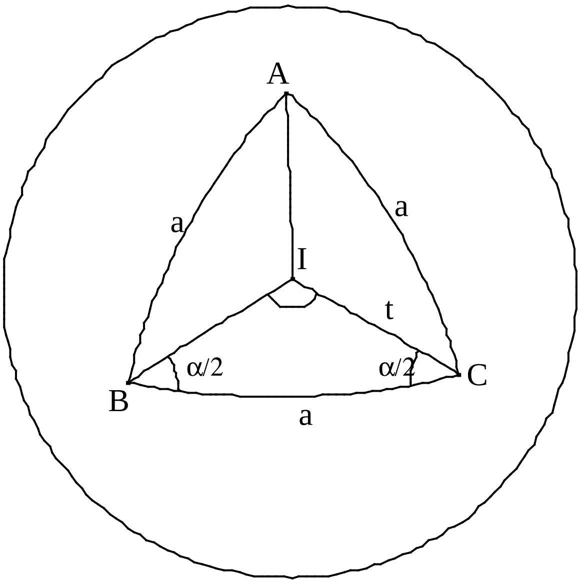


figure 44

Démonstration: Les triangles AIC, AIB et BIC sont isométriques, en effet ils ont tous deux angles et le côté compris entre ses deux angles identiques. On a donc:

$mes(\prec BIC) = mes(\prec AIB) = mes(\prec AIC) = \mu$ et on a 3μ=2π donc μ=2π/3.

On utilise l'une des formules de Delambre:

$$\cos\left(\frac{\alpha/2 - \alpha/2}{2}\right)\sin\frac{a}{2} = \sin\frac{t+t}{2}\sin\frac{2\pi/3}{2} \Leftrightarrow \sin\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t \Leftrightarrow a = 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)$$

car $0 < \frac{a}{2} < \frac{\pi}{2}$ .Montrons que $2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right) < t\sqrt{3}$:

Soit $f(t) = t\sqrt{3} - 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right)$, f est continue et dérivable sur]0;π/2[et on a:

$$f'(t) = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}\cos t}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 t}} = \sqrt{3}\left(1 - \frac{\cos t}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 t}}\right)$$

or $1 - \frac{3}{4}\sin^2 t > 1 - \sin^2 t \quad \forall t \in \left]0;\pi/2\right[$

donc $\frac{\cos t}{\sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2 t}} < \frac{\cos t}{|\cos t|} = 1 \qquad \forall t \in \left]0;\pi/2\right[$

et ainsi $f'(t) > 0 \qquad \forall t \in \left]0;\pi/2\right[$ et $f(t) \xrightarrow{0} 0$

Donc $f(t) > 0 \qquad \forall t \in \left]0;\pi/2\right[\Rightarrow 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t\right) < t\sqrt{3} \qquad \forall t \in \left]0;\pi/2\right[$

Et donc $a < t\sqrt{3}$ CQFD.

<u>Remarque</u>: on rappelle que dans le triangle équilatéral euclidien on aurait: $a = t\sqrt{3}$

III.4 Cercles circonscrit, inscrit et exinscrits à un triangle sphérique

Définition: **le centre I sur la sphère** d'un petit cercle est le pôle du plan contenant ce cercle qui est dans le même hémisphère que le petit cercle. Ainsi **le rayon sphérique** est la distance mesurée à la surface de la sphère entre I et le petit cercle. Notion cohérente car le petit cercle est bien le lieu géométrique des points de la sphère à égale distance sphérique de I (car (OI) est un axe de révolution de la figure).

Propriété: dans triangle sphérique ABC, soit I le point de concours des médiatrices sphériques, alors I est le centre sur la sphère du (petit) cercle sur la sphère circonscrit au triangle ABC (cf figure 45) et soit R=AI le rayon sphérique de ce cercle :

$$\tan R = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}} \qquad \text{avec } S = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

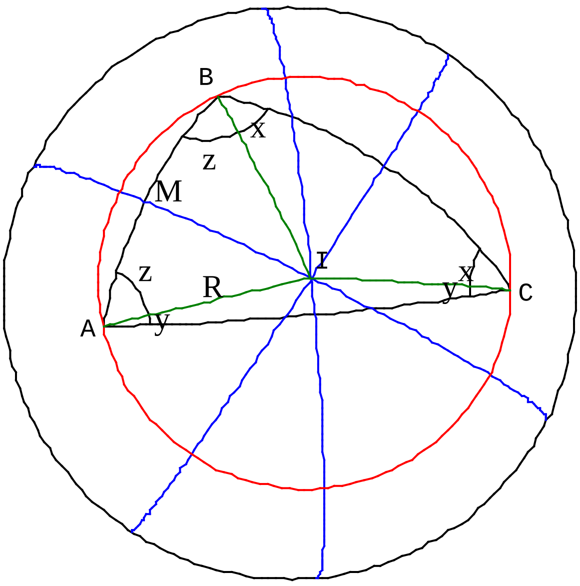


figure 45

Démonstration:

Tout d'abord $I \in S_2 \cap P_{AB} \cap P_{BC} \cap P_{AC}$ avec P_{AB}, P_{BC} et P_{AC} les plans médiateurs de [AB], [BC] et [AC] donc AI=BI=CI alors comme les triangles euclidiens OAI, OBI et OCI sont isométriques (trois côtés identiques) on a : $\prec AOI = \prec BOI = \prec COI$ donc les segments [AI], [BI] et [CI] sont de même longueur que l'on notera R. I est donc le centre du cercle passant par A, B et C et de rayon R mesuré à la surface de la sphère. On a alors deux cas de figure: 1) si I est à l'intérieur du triangle: dans le triangle sphérique CIB isocèle en I on note x l'angle de base, dans CIA on le note y et dans BIA on le note z.

On a alors: y+z=α , z+x=β et x+y=γ d'où $x+y+z = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = S$ et z=S-γ

Soit M le milieu du segment [AB] dans le triangle sphérique AIM rectangle en M (car le triangle sphérique ABI est isocèle en I) et grâce aux formules des demi-côtés on a:

$$\tan R = \frac{\tan \frac{c}{2}}{\cos(S-\gamma)} = \frac{1}{\cos(S-\gamma)}\sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-\gamma)}{\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)}} = \sqrt{\frac{-\cos S}{\cos(S-\alpha)\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}}$$

car d'après les conditions d'existence du triangle sphérique en fonction de ses angles: $-\pi < \alpha+\beta-\gamma < \pi \quad \Rightarrow -\pi/2 < S-\gamma < \pi/2 \Rightarrow \cos(S-\gamma) > 0$

2) si I est à l'extérieur du triangle

Il suffit de considérer comme négatif l'angle x, y, ou z qui est celui du triangle sphérique isocèle en I situé tout en dehors du triangle sphérique ABC, alors les égalités de 1) sont vérifiées. CQFD

<u>Remarque</u>: on a $R < \pi/2$ car le contraire entraînerait que I et le triangle sphérique ABC ne soient pas dans de le même hémisphère ce qui est impossible par construction de I. $R = \frac{\pi}{2}$ est aussi exclu sinon I serait le pôle d'un grand cercle passant par A, B et C, donc A, B et C ne formeraient pas un triangle sphérique.

Nous pouvons maintenant étudier une différence entre le triangle euclidien et le triangle sphérique avec la propriété suivante du triangle euclidien: un triangle euclidien ABC est rectangle en C si et seulement si le centre de son cercle circonscrit appartient au segment [AB].

Propriété: Soit ABC un triangle sphérique tel que le centre du cercle circonscrit à ABC appartienne au côté [AB] alors ABC ne peut être rectangle en C (on a même $\pi/2 < \gamma$).

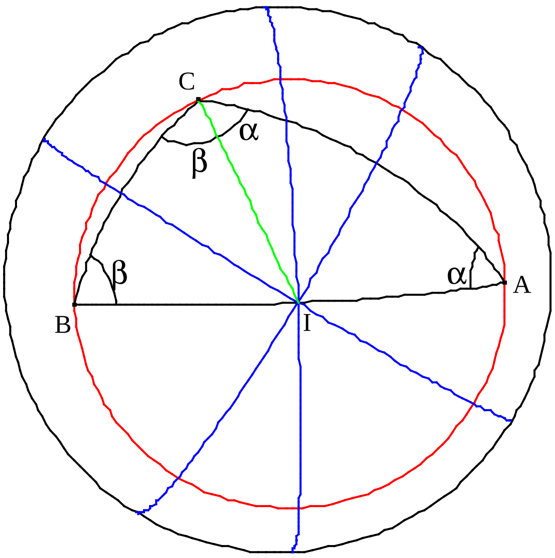


figure 46

Démonstration:

Soit I le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, comme IA=IB=IC les triangles AIC et BIC sont isocèles en I donc les angles de leur base sont égaux donc on a: $\alpha+\beta=\gamma$

Or on sait que: $\pi < \alpha+\beta+\gamma = 2\gamma$ d'où $\pi/2 < \gamma$ CQFD

Dans le plan euclidien le lieu géométrique des sommets des triangles ayant en commun un côté et leur surface est constitué de deux droites parallèles à leur côté commun (car leurs hauteurs ont la même longueur).

Théorème de Lexell: le lieu géométrique des sommets de tous les triangles sphériques ayant en commun un côté et leur surface est constitué de deux petits cercles qui passent par deux points diamétralement opposés aux extrémités du côté commun (cf figure 47).

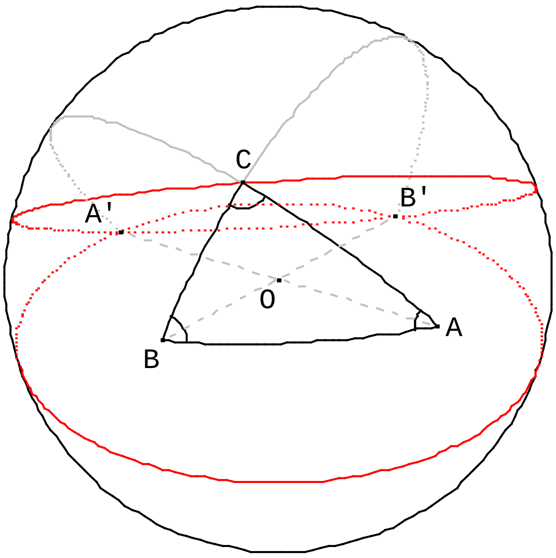


figure 47

Démonstration:

Soient [AB] le côté fixé, ε l'aire fixée de ABC, A', B' les points diamétralement opposés respectivement à A et B et enfin ε' l'aire du triangle A'B'C. Comme les triangles sphériques ABC et $-A'B'C$ (symétrique du triangle sphérique A'B'C par rapport à O) forment un fuseau d'angle γ on a d'après les calculs précédents: $\varepsilon+\varepsilon'=2\gamma$ d'où $\frac{\varepsilon}{2}=\gamma-\frac{\varepsilon'}{2}$ alors d'après l'égalité du calcul du rayon sphérique du cercle circonscrit et en notant R' le rayon sphérique du cercle circonscrit à A'B'C: $\tan R'=\dfrac{\tan\frac{c}{2}}{\cos(S'-\gamma)}=\dfrac{\tan\frac{c}{2}}{\cos\left(\frac{\varepsilon'+\pi}{2}-\gamma\right)}=\dfrac{\tan\frac{c}{2}}{\sin\left(\gamma-\frac{\varepsilon'}{2}\right)}=\dfrac{\tan\frac{c}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}$

comme c et ε sont fixés on a R' constant ce qui implique que C appartient à l'un des deux petits cercles de rayon sphérique R' passant par A' et B': ces deux petits cercles sont bien déterminés car il n'existe que deux triangles sphériques isocèles (placés de part et d'autre de A'B') ayant pour base [A'B'] et des côtés de longueur R' . CQFD

La distance sphérique d'un point $A\in S^2$ à une droite sphérique (BC) est:

_ π/2 si A est un pôle de (BC)

_ si A n'est pas un pôle de (BC) on appelle D_1 et D_2 les intersections de (BC) avec la hauteur issue de A, alors la distance sphérique de A à (BC) est: $\min(AD_1,AD_2)$

Démonstration:

Si A est un pôle de (BC) la distance de tout point de (BC) à A est π/2

Si A n'est pas un pôle de (BC) D_1 et D_2 sont bien définis, supposons $AD_1=\min(AD_1,AD_2)$

Montrons que $AD_1=\inf\limits_{E\in(BC)} AE$, soit $E\in(BC)$ et $E\neq D_2$: considérons le triangle sphérique AD_1E rectangle en D_1: $\cos AE=\cos AD_1\cos ED_1$ or $|\cos D_1E|<1\Rightarrow|\cos AE|<\cos AD_1$

si $AE<\pi/2\Rightarrow AE>AD_1$

si $AE\geq\pi/2\Rightarrow AE>AD_1$ car par construction $AD_1<\pi/2$

On a donc $\forall E \in (BC)\ \ AD_1 \le AE$ CQFD

Propriété: dans triangle sphérique ABC, soit I le point de concours des bissectrices sphériques, alors I est le centre sur la sphère du (petit) cercle sur la sphère inscrit dans le triangle ABC (cf. figure 48) et soit r le rayon sphérique de ce cercle :

$$\tan r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}} \qquad \text{avec } p = \frac{a+b+c}{2}$$

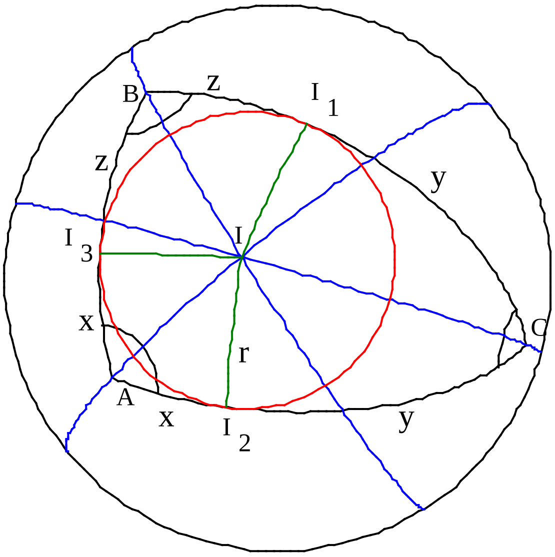


figure 48

Démonstration:

Soient ABC un triangle sphérique, I l'intersection de ses trois bissectrices sphériques, dans le triangle sphérique IBC soit I_1 le pied de la hauteur issue de I, dans IAC on l'appelle I_2, dans IAB on l'appelle I_3.

Dans les triangles sphériques AII_3 et AII_2 rectangles en I3 et I2 on a: $\sin II_3 = \sin AI \sin\frac{\alpha}{2} = \sin II_2$ or la règle des quadrants appliquée aux mêmes triangles donne que II_2 et II_3 sont dans le premier quadrant (car $\alpha/2 < \pi/2$) donc $II_2 = II_3$. En appliquant ce raisonnement dans les triangles sphériques CII_2 et CII_1 puis BII_3 et BII_1 on obtient $II_1 = II_2 = II_3$ donc I est bien le centre du cercle inscrit au triangle sphérique ABC.

Dans les triangles AII_3 et AII_2 rectangles en I3 et I2 on a: $\cos AI_3 = \dfrac{\cos AI}{\cos r} = \cos AI_2$ ($r < \dfrac{\pi}{2}$)donc $AI_2 = AI_3 = x$ de même dans les triangles sphériques CII_2 et CII_1 puis BII_3 et BII_1 on a: $BI_2 = BI_1 = y$ et $CI_1 = CI_3 = z$

Or I appartient à l'intérieur de ABC donc $I_1 \in [CB]$, $I_2 \in [CA]$ et $I_3 \in [AB]$ d'où:

$$x+y=b,\ y+z=a\ ,\ x+z=c \Rightarrow x+y+z = \frac{a+b+c}{2} = p \quad \text{et } x = p - a$$

Ainsi dans le triangle sphérique AII_3 rectangle en I_3 et grâce aux formules des demi-angles on a:

$$\tan r = \sin(p-a)\tan\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p}} \quad \text{CQFD}$$

Cette propriété peut donner lieu à de nouveaux cas de résolution d'un triangle sphérique, on a par exemple:

Soit ABC un triangle sphérique rectangle en C, le rayon du cercle inscrit dans ABC et la longueur du côté c étant donnés, si le problème est possible (il faut au moins $r < \pi/4$) on a alors deux triangles sphériques qui remplissent ces conditions (cf figure 49) .

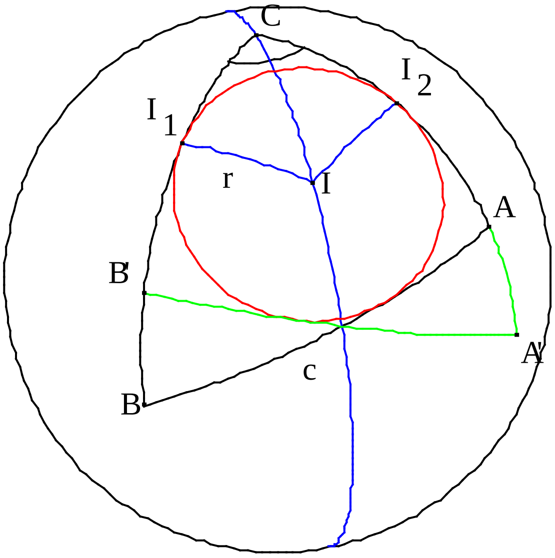


figure 49

Démonstration:

Les éléments du triangle sphérique ABC étant notés comme précédemment, on a dans le triangle sphérique I_1IC, isométrique à I_2IC, rectangle en I_1:

$$\tan(\prec I_1CI) = \tan(\prec I_2CI) = \tan\frac{\gamma}{2} = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\tan r}{\sin CI_1}$$

donc si r>π/4, alors tan r>1 ce qui est impossible, et $r = \frac{\pi}{4} \Rightarrow CI_1 = p - c = \frac{\pi}{2}$, est impossible aussi . D'après l'égalité précédente

$\sin CI_1 = \tan r = \sin(p-c)$ or $0 < p-c < \frac{\pi}{2}$ ainsi $p = c + \arcsin(\tan r)$

et $\tan r = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)\tan r}{\sin p}} \Rightarrow \tan r = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p}$

or $\sin(p-a)\sin(p-b) = \sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos c\right)$

d'où si $\left|\cos c + 2\tan r\sin(c + \arcsin(\tan r))\right| \le 1$

alors: $\cos(a-b) = \cos c + 2\tan r\sin(c + \arcsin(\tan r))$ or -π<a-b<π

$$a - b = \pm\arccos\left(\cos c + 2\tan r\sin(c + \arcsin(\tan r))\right) = \pm D$$

et comme ABC est rectangle en C: $2\cos c = 2\cos a\cos b = \cos\frac{a+b}{2} + \cos\frac{a-b}{2}$

d'où:

$$a+b=2\arccos(2\cos c-\cos\frac{a-b}{2})=2\arccos\left(2\cos c-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos c+2\tan r\sin(c+\arcsin(\tan r)))}\right)=E$$

d'où: $a_1=\frac{E+D}{2}$ et $b_1=\frac{E-D}{2}$ ou bien $a_2=\frac{E-D}{2}$ et $b_2=\frac{E+D}{2}$ ce qui détermine deux triangles sphériques différents. CQFD

Propriété: dans triangle sphérique ABC, soit A' le point de concours des bissectrices sphériques extérieures issues de B et C , alors A' est le centre sur la sphère du (petit) cercle sur la sphère exinscrit au triangle ABC du côté [BC] (cf. figure 50) et soit χ le rayon sphérique de ce cercle:

$$\tan\chi=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin(p-a)}}\qquad \text{avec } p=\frac{a+b+c}{2}$$

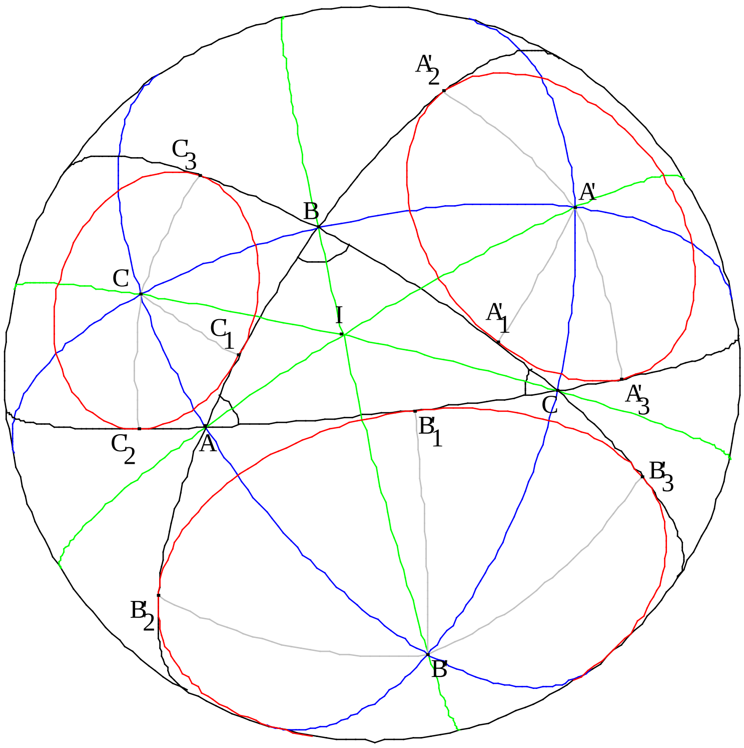


figure 50

Démonstration:

Soit A" le symétrique de A par rapport à O, alors $\prec ACB+\prec BCA"=\pi$ et la bissectrice sphérique extérieure issue de C forme un angle droit avec la bissectrice sphérique intérieure on a: dans ABC la bissectrice sphérique extérieure issue de C est dans A"BC la bissectrice intérieure issue de C, notée D_3 (de même en B, notée D_2). Donc $A'=D_2\cap D_3$ est le centre du cercle inscrit au triangle sphérique A"BC donc exinscrit au triangle ABC.

Soient a', b', et c' les longueurs des côtés du triangle sphérique A"BC on a: $a'=a$, $b'=\pi-b$ et $c'=\pi-c$ d'où: $p'=\frac{a-b-c}{2}+\pi=-p+a+\pi$

$$\tan\chi=\sqrt{\frac{\sin(-p+a+\pi-a')\sin(-p+a+\pi-(\pi-b))\sin(-p+a+\pi-(\pi-c))}{\sin(-p+a+\pi)}}$$

$$\tan\chi=\sqrt{\frac{\sin(p)\sin(-p+a+b))\sin(-p+a+c))}{\sin(p-a)}}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-c)\sin(p-b)}{\sin(p-a)}}\quad \text{CQFD}$$

Remarque: par permutation circulaire et en appelant δ le rayon sphérique du (petit) cercle sur la sphère exinscrit au triangle ABC du côté [AC] et ϕ celui du côté [AB] on a:

$$\tan\delta=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin(p-b)}}\qquad \tan\phi=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin(p-c)}}$$

III.5 Théorème de Morley non transposable au triangle sphérique

Nous avons vu que sur le triangle sphérique les médianes sphériques sont concourantes en un point qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle. Cependant on ne peut transposer les propriétés des angles des triangles euclidiens au cas sphérique. Par exemple le théorème de Morley: soit ABC un triangle euclidien, on divise en trois chaque angle du triangle, on appelle A' le sommet du triangle d'angles de base β/3 et γ/3 (de même pour B', C') alors le triangle euclidien A'B'C' est équilatéral (cf figure 51).

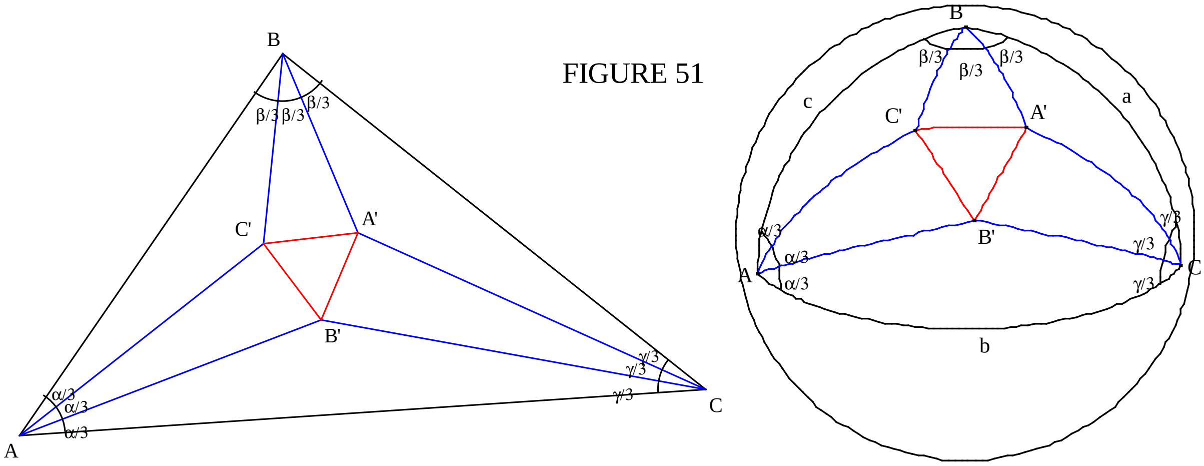


FIGURE 51

Le théorème de Morley n'est pas vérifié pour le triangle sphérique.

Démonstration:

Considérons le triangle sphérique ABC tel que : $\alpha=\gamma=\pi/2$ et $\beta=3\pi/4$

On peut le construire dans un repère orthonormé en plaçant: A=(1;0;0), B=(0;0;1) et $C=(-\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2;0)$ on a alors $a=c=\pi/2$ et $b=3\pi/4$

Et montrons que $B'C'\neq C'A'$, il suffit de montrer que $\cos B'C'\neq\cos C'A'$

On rappelle que: $\tan\frac{\pi}{4}=1$, $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos x=\pm\sqrt{\frac{1}{\tan^2 x+1}}$ et que, $\sin x=\pm\sqrt{\frac{1}{\cot^2 x+1}}$

Dans le triangle sphérique ACB': $\cot AB'\sin b=\cos b\cos\frac{\alpha}{3}+\sin\frac{\alpha}{3}\cot\frac{\gamma}{3}$

$$\Rightarrow\ \cot AB'=\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)$$

donc $0 < \cot AB' \Rightarrow AB' < \pi/2$ alors $\cos AB' = \sqrt{\dfrac{1}{\dfrac{4}{3\left(\sqrt{2}-1\right)^2}+1}} = \left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{\dfrac{3}{4+3\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}$

et $\sin AB' = \sqrt{\dfrac{4}{3\left(\sqrt{2}-1\right)^2+4}}$

Dans le triangle sphérique ABC'on a: $\cot AC'\sin c = \cos c\cos\dfrac{\alpha}{3} + \sin\dfrac{\alpha}{3}\cot\dfrac{\beta}{3} \Rightarrow \cot AC' = \dfrac{1}{2}$

$$\cos AC' = \sqrt{\frac{1}{4+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \sin AC' = \sqrt{\frac{4}{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

et on a aussi: $\cot BC'\sin c = \cos c\cos\dfrac{\beta}{3} + \sin\dfrac{\beta}{3}\cot\dfrac{\alpha}{3} \Rightarrow \cot BC' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

$$\cos BC' = \sqrt{\frac{6}{4+6}} = \sqrt{\frac{3}{5}} \qquad \sin BC' = \sqrt{\frac{4}{6+4}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Dans le triangle sphérique CBA'on a: $\cot BA'\sin a = \cos a\cos\dfrac{\beta}{3} + \sin\dfrac{\beta}{3}\cot\dfrac{\gamma}{3}$

$$\Rightarrow \cot BA' = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \cos BA' = \sqrt{\frac{3}{5}} \text{ et } \sin BA' = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

Dans le triangle sphérique AB'C' on a: $\cos B'C' = \cos AB'\cos AC' + \sin AB'\sin AC'\cos\dfrac{\alpha}{3}$

$$\cos B'C' = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{3}{4+3\left(\sqrt{2}-1\right)^2}} + \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{3\left(\sqrt{2}-1\right)^2+4}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}\sqrt{3\left(\sqrt{2}-1\right)^2+4}}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

Dans le triangle sphérique BA'C' on a: $\cos A'C' = \cos BA'\cos BC' + \sin BA'\sin BC'\cos\dfrac{\beta}{3}$

$$\cos A'C' = \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3+\sqrt{2}}{5}$$

Nous pouvons comparer les carrés des deux dernières expressions:

$$\cos^2 B'C' = \frac{3}{5\left(3\left(3-2\sqrt{2}\right)+4\right)}\left(3+2\sqrt{2}\right) = \frac{9+6\sqrt{2}}{65-30\sqrt{2}} \text{ et } \cos^2 A'C' = \frac{11+6\sqrt{2}}{25}$$

par l'absurde supposons $\cos B'C' = \cos C'A'$ alors :

$$25\left(9+6\sqrt{2}\right) = \left(65-30\sqrt{2}\right)\left(11+6\sqrt{2}\right)$$

$$225+150\sqrt{2} = 355+60\sqrt{2} \quad \text{impossible}$$

On a donc bien : $\cos B'C' \neq \cos C'A'$

CQFD

III.6 Inégalité isopérimétrique pour le triangle sphérique

L'inégalité isopérimètrique pour le triangle euclidien donne, en notant S l'aire triangle et 2p son périmètre: $S \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ avec l'égalité si et seulement si le triangle est équilatéral. A l'instar du triangle euclidien, nous pouvons étudier les variations de l'aire d'un triangle sphérique ayant un périmètre fixé.

Théorème: Soit ABC un triangle sphérique, a+b+c=2p fixé alors on a: $\varepsilon \leq 4\arctan\sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan^3\frac{p}{6}}$ et l'égalité a lieu si et seulement si ABC est équilatéral.

Démonstration:
comme p est fixé, on a c=2p-a-b et les conditions d'existence du triangle sphérique en fonction des longueurs ses côtés donnent:

$$|a-b| < 2p-a-b < a+b \Leftrightarrow \begin{cases} a+b-2p < a-b \\ a-b < 2p-a-b \\ 2p-a-b < a+b \end{cases} \Leftrightarrow \text{a<p et b<p et p<a+b}$$

d'après la formule de l'Huilier on a: $\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}}$

Il s'agit donc d'étudier le maximum de la fonction (cf figure 52):

$$\left\{(a;b) \in \left]0;p\right[^2 / p < a+b\right\} = D_P \to \left]0:2\pi\right[$$

$$(a;b) \mapsto \phi(a,b) = 4\arctan\sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{a+b-p}{2}}$$

Evolution de l'aire de ABC en fonction de a et b(p= π/2)

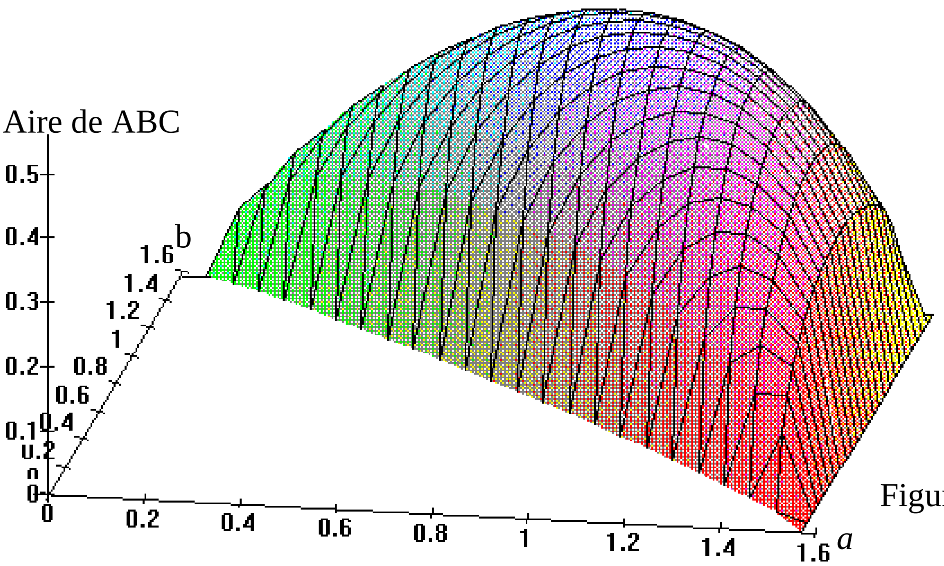


Figure 52

comme la fonction $x \mapsto 4\arctan\sqrt{x}$ est croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ on a:

$$\sup_{(a,b)\in D_p}\phi(a,b)=4\arctan\sqrt{\sup_{(a,b)\in D_p} f(a,b)} \text{ avec } f(a,b)=\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{a+b-p}{2}$$

il suffit donc d'étudier les variations de $f\in C^\infty\left(D_p\right)$ car les arguments des tangentes sont compris entre 0 et π/2:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-b}{2}\left(-\frac{\tan\frac{a+b-p}{2}}{2\cos^2\frac{p-a}{2}}+\frac{\tan\frac{p-a}{2}}{2\cos^2\frac{a+b-p}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=0\Leftrightarrow b=p \text{ ou } \tan\frac{p-a}{2}\cos^2\frac{p-a}{2}=\tan\frac{a+b-p}{2}\cos^2\frac{a+b-p}{2}$$

or b=p est exclu donc : $\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=0\Leftrightarrow\sin\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-a}{2}=\sin\frac{a+b-p}{2}\cos\frac{a+b-p}{2}$

or $\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin(2x)$ donc $\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=0\Leftrightarrow\sin(p-a)=\sin(a+b-p)$

or 0<p-a<π et 0<a+b-p=p-c<π donc:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=0\Leftrightarrow p-a=a+b-p \text{ ou } \pi-p+a=a+b-p$$

or $\pi-p+a=a+b-p\Rightarrow b=\pi$ impossible donc:

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=0\Leftrightarrow 2p=2a+b=a+b+c\Leftrightarrow a=c$$

par symétrie de f on a: $\frac{\partial f}{\partial b}(a,b)=0\Leftrightarrow b=c$ donc $\Delta f(a,b)=0\Leftrightarrow a=b=c=\frac{2p}{3}$

Il reste à montrer que ce point est bien un maximum.

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=\frac{1}{2}\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-b}{2}\left(\frac{\sin\frac{p-a}{2}\cos\frac{p-a}{2}-\sin\frac{a+b-p}{2}\cos\frac{a+b-p}{2}}{\cos^2\frac{p-a}{2}\cos^2\frac{a+b-p}{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,b)=\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-b}{2}\left(\frac{\sin(p-a)-\sin(a+b-p)}{(1+\cos(p-a))(1+\cos(a+b-p))}\right)$$

Soit $h(a,b)=\frac{\sin(p-a)-\sin(a+b-p)}{(1+\cos(p-a))(1+\cos(a+b-p))}$

$$\frac{\partial h}{\partial a}(a,b)=\frac{-\left(\cos(p-a)+\cos(a+b-p)\right)}{(1+\cos(p-a))(1+\cos(a+b-p))}$$
$$-\frac{\left(\sin(p-a)-\sin(a+b-p)\right)\left(\sin(p-a)\left(1+\cos(a+b-p)\right)-\sin(a+b-p)\left(1+\cos(p-a)\right)\right)}{(1+\cos(p-a))^2(1+\cos(a+b-p))^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial a}\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)=\frac{-2\cos\frac{p}{3}}{(1+\cos(\frac{p}{3}))^2}=\frac{-2\cos\frac{p}{3}}{4\cos^4\frac{p}{6}}$$

d'où: $\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)=-\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p}{6}\frac{\cos\frac{p}{3}}{2\cos^2\frac{p}{6}}=\frac{\partial^2 f}{\partial b^2}\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$ par symétrie de f

$$\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(a,b) = \tan\frac{p}{2}\left(-\frac{h(a,b)}{2\cos^2\frac{p-b}{2}} + \tan\frac{p-b}{2}\frac{\partial h}{\partial b}(a,b) \right) \text{ or } h(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}) = 0$$

d'où: $\frac{\partial^2 f}{\partial b \partial a}(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}) = -\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p}{6}\frac{\cos\frac{p}{3}}{2\cos^4\frac{p}{6}}$

comme on a: $0<p<\pi$ on a: $\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p}{6}\frac{\cos\frac{p}{3}}{2\cos^4\frac{p}{6}} = \delta > 0$ et $D^2(-f)\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right) = \delta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

et $D^2(-f)\left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)(h_1,h_2) = \delta\left(h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2\right) > \delta\left\|(h_1,h_2)\right\|^2 \quad \forall(h_1,h_2) \in D_p$

donc la dérivée d'ordre deux de -f au point $X = \left(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3}\right)$ est strictement positive dans un voisinage de X, donc f admet un maximum local en X. Et comme le gradient de f ne s'annule nulle part ailleurs sur D_p , f(X) est le maximum de f sur D_p.

CQFD

III.7 Théorème de Legendre

Le théorème de Legendre s'applique lorsque le rapport des longueurs des côtés par le rayon de la sphère est petit. Nous pouvons donc considérer deux cas de figure:

_trois points fixés A, B, C dans l'espace (non alignés), ces trois points déterminent un unique triangle du plan euclidien, mais une infinité de triangles sphériques. En effet par ces trois points passe une infinité de sphères de rayons différents dont les centres sont sur la droite intersection des trois plans médiateurs de [AB], [AC] et [BC] (on a démontré son existence pour prouver l'existence du point de concours des médiatrices sphériques) . Ainsi on peut ordonner ces sphères dans l'ordre croissant de leur rayon. Pour de grandes valeurs, mais cependant finies, du rayon r, on a le théorème de Legendre.

_ la sphère étant fixée on considère ABC(p) des triangles dont le périmètre diminue en se rapprochant de 0, le théorème s'appliquera aussi.

Quelques remarques préliminaires:

Aux longueurs a, b, c des côtés du triangle sphérique ABC mesurées dans une unité métrique quelconque, correspondent les angles faciaux a/r, b/r, c/r, du trièdre O-ABC, mesurés en radians (r étant mesuré dans la même unité que a, b et c).

Nous avons vu que $\varepsilon \leq 4\arctan\sqrt{\tan\frac{p}{2r}\tan^3\frac{p}{6r}} = O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^2\right)$ quand $p/r \to 0$, donc quand p/r est très petit ε l'est.

Théorème de Legendre: Etant donné ABC un triangle sphérique dont les longueurs a, b, c des côtés sont "très petites" par rapport au rayon r de la sphère (ie p/r est très petit), si l'on construit un triangle euclidien A'B'C' dont les longueurs des côtés sont a, b et c alors: _ les surfaces des deux triangles seront égales, aux termes près du deuxième ordre par rapport à p/r

_ les angles de ABC seront égaux à ceux de A'B'C' augmentés du tiers de l'excès sphérique de ABC, aux termes près du quatrième ordre par rapport à p/r.

Démonstration:
Dans le triangle sphérique ABC sur la sphère de rayon r, on note Q=p/r et on travaille pour Q proche de 0:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{r}\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}}=\sqrt{\frac{\left(\frac{p-b}{r}-\frac{(p-b)^3}{6r^3}+O(Q^5)\right)\left(\frac{p-c}{r}-\frac{(p-c)^3}{6r^3}+O(Q^5)\right)}{\left(\frac{b}{r}-\frac{(b)^3}{6r^3}+O(Q^5)\right)\left(\frac{c}{r}-\frac{(c)^3}{6r^3}+O(Q^5)\right)}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\frac{(p-b)(p-c)}{r^2}-\frac{(p-b)(p-c)\left((p-b)^2+(p-c)^2\right)}{6r^4}+O(Q^6)}{\frac{bc}{r^2}-\frac{bc^3+b^3c}{6r^4}+O(Q^6)}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{1-\frac{(p-b)^2+(p-c)^2}{6r^2}+O(Q^4)}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}+O(Q^4)}}$$

or $\dfrac{1}{1-\frac{b^2+c^2}{6r^2}+O(Q^4)}=1+\dfrac{b^2+c^2}{6r^2}+O(Q^4)$ et

$$b^2+c^2-(p-b)^2-(p-c)^2=-2p^2+2pb+2pc=p(-2p+2b+2c)=p(b+c-a)=2p(p-a)$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{1+\frac{p(p-a)}{3r^2}+O(Q^4)}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\left(1+\frac{p(p-a)}{6r^2}+O(Q^4)\right)$$

de la même façon on a:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p}{r}\sin\frac{p-a}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{\left(1-\frac{p^2+(p-a)^2}{6r^2}+O(Q^4)\right)\left(1+\frac{b^2+c^2}{6r^2}+O(Q^4)\right)}$$

or
$$p^2+(p-a)^2-b^2-c^2=2p^2-a(a+b+c)-b^2-c^2+a^2$$
$$=2p^2-b(b+a)-c(c+a)=2p^2-b(2p-c)-c(2p-b)=2(p-b)(p-c)$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\sqrt{1-\frac{(p-b)(p-c)}{3r^2}+O(Q^4)}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\left(1-\frac{(p-b)(p-c)}{6r^2}+O(Q^4)\right)$$

Considérons maintenant le triangle euclidien A'B'C' ayant pour longueur de côtés a, b, c, on note α', β', γ' ses angles et S' sa surface, on a:

$$\sin\frac{\alpha'}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\qquad\qquad \cos\frac{\alpha'}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

donc on a:

$$\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha'}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha'}{2}=\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}\left(\frac{p(p-a)+(p-b)(p-c)}{6r^2}+O(Q^4)\right)$$

or $p(p-a)+(p-b)(p-c)=p(b+c-p)+p^2-bp-cp+bc=bc$

et soit S' l'aire de A'B'C': $S' = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ donc: $\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2} = \frac{S'}{6r^2} + O(Q^4)$

or $-\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha-\alpha'}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc $\alpha-\alpha' = O(\frac{S'}{r^2}) = O(Q^2)$ car $S' \leq \frac{p^2}{3\sqrt{3}}$ et $\sin\frac{\alpha-\alpha'}{2} = \frac{\alpha-\alpha'}{2} + O(Q^4) = \frac{S'}{6r^2} + O(Q^4)$.

Puis, par permutation circulaire on a::

$$\alpha = \alpha' + \frac{S'}{3r^2} + O(Q^4) \;,\; \beta = \beta' + \frac{S'}{3r^2} + O(Q^4) \;, \gamma = \gamma' + \frac{S'}{3r^2} + O(Q^4) \quad (*)$$

en additionnant les trois égalités: $\alpha+\beta+\gamma = \alpha'+\beta'+\gamma' + \frac{S'}{r^2} + O(Q^4) = \pi + \frac{S'}{r^2} + O(Q^4)$

Soit S l'aire du triangle sphérique ABC, ε son excès sphérique: $\alpha+\beta+\gamma-\pi = \varepsilon = \frac{S}{r^2}$

donc: $S = S' + O(Q^2)$ et les équations (*) donnent:

$$\alpha = \alpha' + \frac{\varepsilon}{3} + O(Q^4) \;,\; \beta = \beta' + \frac{\varepsilon}{3} + O(Q^4) \;, \gamma = \gamma' + \frac{\varepsilon}{3} + O(Q^4) \qquad \text{CQFD}$$

On utilise le théorème de Legendre lorsque les précisons en $(p/r)^4$ sont satisfaisantes donc quand les côtés sont très petits par rapport au rayon de la sphère. Mais on peut aussi l'appliquer à un triangle sphérique ayant deux côtés qui diffèrent peu de πr, car en formant le fuseau compris entre ces deux côtés on obtient un deuxième triangle sphérique dont les côtés sont petits par rapport au rayon r. De même le cas d'un triangle sphérique ayant deux angles très aigus sera résolu grâce a son triangle polaire qui aura deux côtés proches de πr.

Le théorème de Legendre permet aussi le passage à la limite dans les formules de trigonométrie sphérique, ce qui ramène à des formules de trigonométrie plane. On a par exemple:

Formules de la trigonométrie sphérique	Formules de la trigonométrie plane
Formule de l'Huilier: $\tan\frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan\frac{p}{2r}\tan\frac{p-a}{2r}\tan\frac{p-b}{2r}\tan\frac{p-c}{2r}}$ avec 2p=a+b+c	Formule de Héron: $Aire(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Loi des sinus: $\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\alpha} = \frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin\beta} = \frac{\sin\frac{c}{r}}{\sin\gamma}$	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
Loi des cosinus pour les côtés: $\cos\frac{a}{r} = \cos\frac{c}{r}\cos\frac{b}{r} + \sin\frac{c}{r}\sin\frac{b}{r}\cos\alpha$	Formule d'Al Kashi: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$
Loi des cosinus pour un triangle rectangle en C: $\cos\frac{c}{r} = \cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}$	Théorème de Pythagore: $c^2=a^2+b^2$

Formule des demi-angles:	
$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{r}\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}}$	$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

Démonstration:
Montrons l'égalité approximative des aires. On connaît l'aire d'un triangle sphérique grâce à la formule de Girard: $A=\varepsilon r^2$; et celle d'un triangle plan grâce à la formule de Héron: $A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

On utilise la formule de l'Huilier et le fait que $\varepsilon=O(p/r)$ car : $\varepsilon\frac{r}{p}\leq\frac{r}{p}\sqrt{\tan\frac{p}{2r}\tan^3\frac{p}{6r}}$ borné au voisinage de p/r=0

$$\tan\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\tan\frac{p}{2}\tan\frac{p-a}{2}\tan\frac{p-b}{2}\tan\frac{p-c}{2}} \text{ avec: } p=\frac{a+b+c}{2}$$

$$\frac{\varepsilon}{4}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)=\sqrt{\frac{p}{2r}\frac{p-a}{2r}\frac{p-b}{2r}\frac{p-c}{2r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^6\right)}$$

$$\frac{\varepsilon}{4}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)=\frac{1}{4r^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\sqrt{1+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^2\right)}$$

$$\frac{\varepsilon}{4}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)=\frac{1}{4r^2}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^6\right)$$

d'où $\quad \varepsilon r^2=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}+O\left(\frac{p}{r}\right)$

On a bien l'égalité quand p/r tend vers 0, entre l'aire du triangle sphérique et celle du triangle plan.
On notera comme précédemment α, β, γ les angles du triangle sphérique et α', β', γ' ceux du triangle plan correspondant, d'après le théorème de Legendre et l'inégalité des accroissements finis: $\left|\sin\alpha-\sin\alpha'\right|\leq\left|\alpha-\alpha'\right|=O\left(\frac{p}{r}\right)$ de même pour β et γ

Première étude, la loi des sinus:

$$\frac{\sin\frac{a}{r}}{\sin\alpha}=\frac{\sin\frac{b}{r}}{\sin\beta}\Rightarrow\frac{\frac{a}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)}{\sin\alpha'+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)\right)}=\frac{\frac{b}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)}{\sin\beta'+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{a}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)}{\sin\alpha'}\left(1+O\left(\frac{p}{r}\right)\right)=\frac{\frac{b}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)}{\sin\beta'}\left(1+O\left(\frac{p}{r}\right)\right)\Rightarrow\frac{a}{r\sin\alpha'}=\frac{b}{r\sin\beta'}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^2\right)$$

Lorsque p/r tend vers 0 on obtient la loi des sinus dans un triangle plan.

Deuxième étude, la loi des cosinus pour les côtés: $\left|\cos\alpha-\cos\alpha'\right|\leq\left|\alpha-\alpha'\right|=O\left(\frac{p}{r}\right)$

$$\cos\frac{a}{r}=\cos\frac{c}{r}\cos\frac{b}{r}+\sin\frac{c}{r}\sin\frac{b}{r}\cos\alpha \Rightarrow$$

$$1-\frac{a^2}{2r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)=\left(1-\frac{c^2}{2r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)\right)\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)\right)+\left(\frac{c}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)\right)\left(\frac{b}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)\right)\left(\cos\alpha'+\right.$$

$$\frac{a^2}{r^2}=\frac{c^2}{r^2}+\frac{b^2}{r^2}-\frac{2bc}{r^2}\cos\alpha'+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)\Rightarrow a^2=c^2+b^2-2bc\cos\alpha'+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)\right)$$

Lorsque p/r tend vers 0 on obtient la formule d'Al Kashi.

Troisième étude, la loi des cosinus dans un triangle sphérique rectangle en C:

$$\cos\frac{c}{r}=\cos\frac{a}{r}\cos\frac{b}{r}\Rightarrow 1-\frac{c^2}{2r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)=\left(1-\frac{a^2}{2r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)\right)\left(1-\frac{b^2}{2r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)\right)$$

$$\frac{c^2}{2r^2}=\frac{a^2}{2r^2}+\frac{b^2}{2r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)\Rightarrow c^2=a^2+b^2+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^2\right)$$

Ainsi lorsque p/r tend vers 0 on obtient la formule de Pythagore dans un triangle plan rectangle en C.

Quatrième étude, la formule des demi-angles pour les sinus:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{p-b}{r}\sin\frac{p-c}{r}}{\sin\frac{b}{r}\sin\frac{c}{r}}}\Rightarrow\sin\frac{\alpha'}{2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)\right)=\sqrt{\frac{\left(\frac{p-b}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)\right)\left(\frac{p-c}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)\right)}{\left(\frac{b}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)\right)\left(\frac{c}{r}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^3\right)\right)}}$$

$$\sin\frac{\alpha'}{2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)\right)=\sqrt{\frac{\frac{(p-b)(p-c)}{r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)}{\frac{bc}{r^2}+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^4\right)}}\Rightarrow\sin\frac{\alpha'}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\left(1+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^2\right)\right)\left(1+O\left(\left(\frac{p}{r}\right)^2\right.\right.}$$

Lorsque p/r tend vers 0 on obtient une formule du triangle plan.

IV Applications

IV.1 Une propriété des quadrilatères sphériques

Nous avons déjà vu en calculant l'aire des polygones sphériques convexes que l'on pouvait "découper" tout polygone sphérique convexe en plusieurs triangles sphériques. Ainsi la trigonométrie sphérique peut-elle permettre en particulier l'étude des quadrilatères sphériques à trois angles droits. On a par exemple:

Soit ABCD un quadrilatère sphérique convexe ayant les angles en A, B et C droits. Soit a, b les longueurs des segments [AB], [BC] et δ la mesure de l'angle en D. Alors on a (cf figure 53) $0<a\le\pi/2$ et $0<b\le\pi/2$: $\cos\delta=-\sin a\sin b$
Ce qui montre entre autre qu'il n'existe pas de quadrilatère sphérique convexe à quatre angles droits.

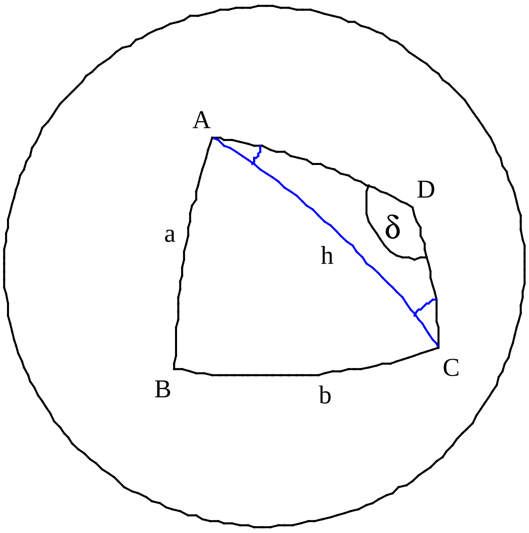


figure 53

Démonstration: On appelle h la longueur du segment [AC] sur la sphère, dans le triangle sphérique ABC on appelle α et γ les mesures des angles en A et C:
_ si on suppose a et b dans le premier quadrant alors par la règle des quadrants α et β le sont aussi et dans le triangle sphérique ACD on a:

$$\cos\delta=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right)\cos(h)$$

$$\cos\delta=-\sin\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma\cos(h)$$

Or dans le triangle sphérique ABC rectangle en C:

$$\cos(h)=\cot\gamma\cot\alpha\Rightarrow\sin\alpha\sin\gamma\cos(h)=\cos\alpha\cos\gamma$$

donc $$\cos\delta=-\sin\alpha\sin\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos^2(h)$$

$$\cos\delta=-\sin\alpha\sin\gamma\left(1-\cos^2(h)\right)=-\sin\alpha\sin\gamma\sin^2(h)$$

et enfin dans le triangle sphérique ABC : $\sin a=\sin\gamma\sin(h)$ et $\sin b=\sin\alpha\sin(h)$
d'où : $\cos\delta=-\sin a\sin b$
_ si on suppose a et b dans le deuxième quadrant alors la règle des quadrants appliquée aux triangles sphériques rectangles BCD et ABD nous donne que ABCD n'est pas convexe (l'angle en D mesuré à l'intérieur de ABCD est supérieure à π)
_ si a et b ne sont pas dans les mêmes quadrants, supposons a<b :soit C' le pôle de la droite sphérique (AB) situé du côté de C, alors le triangle sphérique ABC' est birectangle donc isocèle en C' ses côtés [AC'] et [BC'] mesurent donc π/2. Or comme π/2<b $C'\in[BC]$ et $C'\in[AD]$ donc ABCD n'est pas convexe.

Par ailleurs supposons par l'absurde le quadrilatère ABCD droit en D alors sin a sin b=0 ce qui est impossible. CQFD

Remarque: On peut prouver d'une façon plus élégante qu'il n'existe pas de polygone sphérique convexe à quatre angles droits: par l'absurde supposons qu'il existe alors la formule donnant l'aire de ABCD en fonction de ses angles et du nombre de ses sommets donne:

$$aire(ABCD) = 4*\frac{\pi}{2} - 2\pi \Rightarrow aire(ABCD) = 0 \text{ impossible}$$

IV.2 Volume d'un parallélépipède oblique

La trigonométrie sphérique donne de nombreuses relations dans les angles trièdres, ce qui peut être utile pour la géométrie classique dans l'espace. Ainsi les formules de trigonométrie sphérique développées précédemment permettent par exemple le calcul du volume d'un parallélépipède oblique connaissant les longueurs des arêtes et les angles qu'elles font entre elles.

Rappelons que le parallélépipède oblique est définit par la donnée de trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ OP_1, OP_2, OP_3 :

$$OP_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7 = \left\{ X \in \mathbb{R}^3 \,/\, OX = \lambda OP_1 + \mu OP_2 + \nu OP_3 \;,\; (\lambda;\mu;\nu) \in [0;1]^3 \right\}$$

> Soit $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ un parallélépipède oblique (cf figure 54), $a = mes(\prec P_2OP_3)$, $b = mes(\prec P_1OP_3)$ et $c = mes(\prec P_1OP_2)$ et soit V le volume de $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ a alors on a:
>
> $$V = 2OP_1 \times OP_2 \times OP_3 \sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)} \text{ où } 2p=a+b+c$$

Démonstration:

Soit $OP_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ un parallélépipède oblique on place en O une sphère S de rayon unité puis on note: $A = [OP_1) \cap S$, $B = [OP_2) \cap S$, $C = [OP_3) \cap S$

Alors les longueurs a, b, c des côtés du triangle sphérique ABC sont les mesures des angles faciaux de l'angle trièdre O-$P_1P_2P_3$ et les angles α, β et γ sont égaux aux angles dièdres du même angle trièdre.

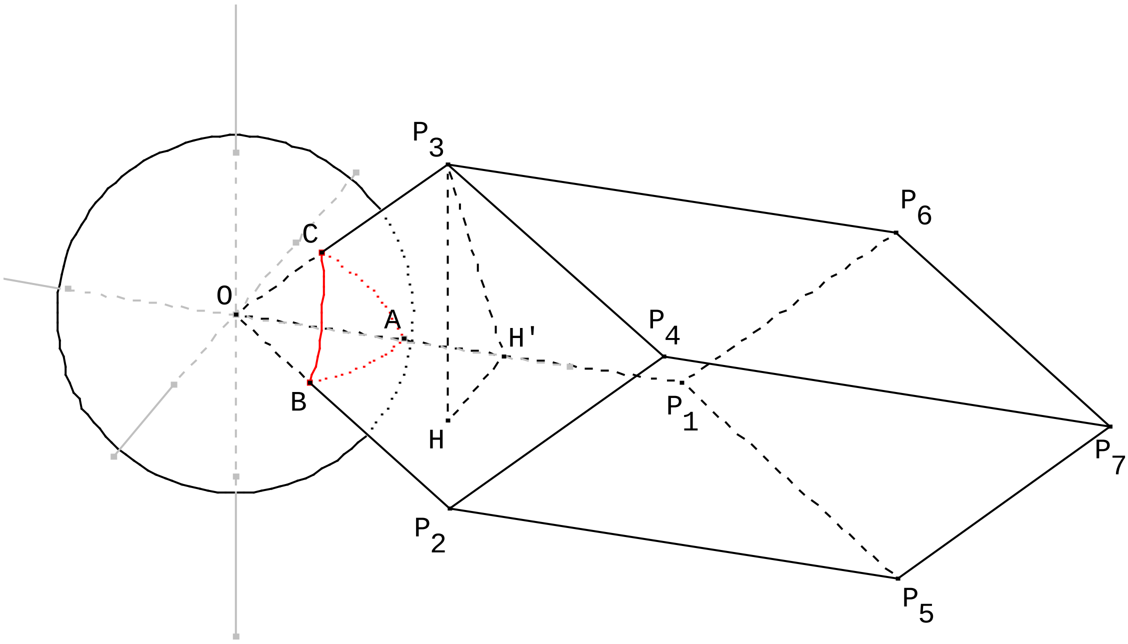


fig.54

Dans le plan (OP_1P_2) on a : $Aire(OP_1P_2P_3) = OP_1 \times OP_2 \times \sin c$

Soit H la projection orthogonale de P_3 sur le plan (OP_1P_2) on a: $V = OP_1 \times OP_2 \times HP_3 \times \sin c$

Soit H' la projection orthogonale de P_3 sur la droite (OP_1) on a alors: $mes(\prec HH'P_3) = \alpha$

Dans les triangles rectangles OP_3H' puis dans $HH'P_3$ on a: $H'P_3 = OP_3 \sin b$

puis $HP_3 = H'P_3 \times \sin\alpha = OP_3 \times \sin b \sin\alpha$

d'où: $V = OP_1 \times OP_2 \times OP_3 \times \sin b \sin c \sin\alpha$

les formules des demi-angles appliquées au triangle sphérique ABC donnent:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}}{\sin b \sin c}$$

donc $\quad V = 2OP_1 \times OP_2 \times OP_3\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)}$ CQFD.

Corollaire: soient $OP_1P_2P_3$ un tétraèdre, $a = mes(\prec P_2OP_3)$, $b = mes(\prec P_1OP_3)$ et $c = mes(\prec P_1OP_2)$ et soit V le volume de $OP_1P_2P_3$ on a :

$$V = \frac{1}{3}OP_1 \times OP_2 \times OP_3\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)} \quad \text{où } 2p=a+b+c$$

Démonstration:

On sait que V est égal au tiers de l'aire de la base OP_1P_2 (moitié du parallèlogramme $OP_1P_2P_5$) multipliée par la hauteur issue de P_3 donc:

$$V = \frac{1}{3}\frac{1}{2}2OP_1 \times OP_2 \times OP_3\sqrt{\sin p \sin(p-a)\sin(p-b)\sin(p-c)} \qquad \text{CQFD.}$$

IV.3 La navigation

La forme de la Terre est irrégulière, cependant elle peut-être approchée assez précisément par une ellipsoïde de révolution ayant pour axe l'axe Nord-Sud. L'aplatissement de cette ellipsoïde étant très petit (les mesures de Hayford (1924) donnent le rayon équatorial égal à 6378.388 km et le rayon polaire égal à 6356.912 km) on considère, en première approximation, la Terre comme étant une sphère de rayon 6371.221 km.

Sur cette sphère sont prédéfinis (par l'axe de rotation) un grand cercle et ses deux pôles: l'équateur, le pôle Nord P_n et le pôle Sud P_s. On appelle "méridien", le grand cercle passant par un point (différent des deux pôles) et les deux pôles, le méridien de référence (ou d'origine) est celui passant par l'observatoire astronomique de Greenwich. Ceci nous permet donc de définir un système de coordonnées sur la Terre: on considère la Terre comme une sphère, la latitude d'un point A est la distance angulaire de A à l'équateur le long du méridien de A, elle est dite Nord (resp. Sud) si A se situe dans l'hémisphère Nord (resp. Sud); la longitude de A est l'angle (inférieur à π) entre le méridien de Greenwich et celui de A, elle est dite Ouest (resp. Est) si A est situé à l'Ouest (resp. Est) du méridien d'origine. D'une manière équivalente le système de coordonnées sur la Terre peut être assimilé à un système de coordonnées sphérique choisit comme sur la figure 55 en plaçant l'axe Nord-Sud sur l'axe (oz), le plan(oxz) contenant Greenwich, l'origine du repère au centre de la Terre et en considérant: $0<\varphi$ au Nord, $\varphi<0$ au Sud, $0<\lambda$ à l'Est et $\lambda<0$ à l'Ouest.

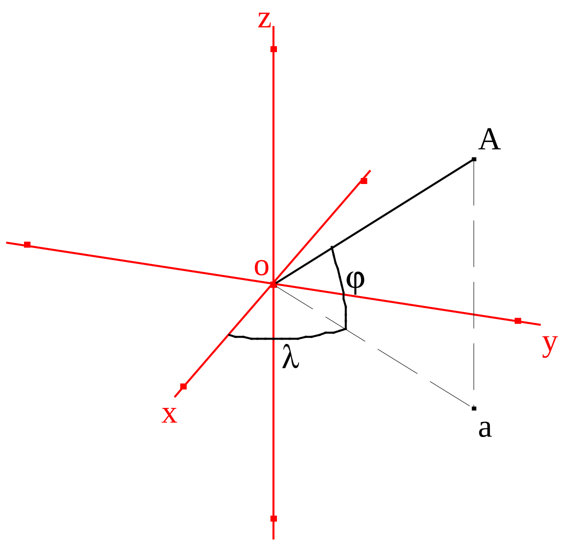


figure 55

Si on prend deux points sur la Terre, alors les deux méridiens de ces deux points, et l'arc de grand cercle joignant ces deux points forment deux triangles sphériques. Il est donc légitime d'utiliser la trigonométrie sphérique pour les calculs de distances, par exemple, sur la Terre.

Considérons un avion qui partirait d'un point A pour ce rendre à un point B, alors cet avion peut suivre deux routes: le plus naturel est pour lui de suivre l'arc de grand cercle qui relie A et B (puisque l'on a vu sur la sphère c'était le plus court chemin), c'est ce qu'on appelle une **route orthodromique**, ou il peut suivre un cap constant (c'est-à-dire qui forme un angle constant avec les méridiens) ce qu'on appelle un **route loxodromique**. Etudions rapidement la paramétrisation d'une route loxodromique.

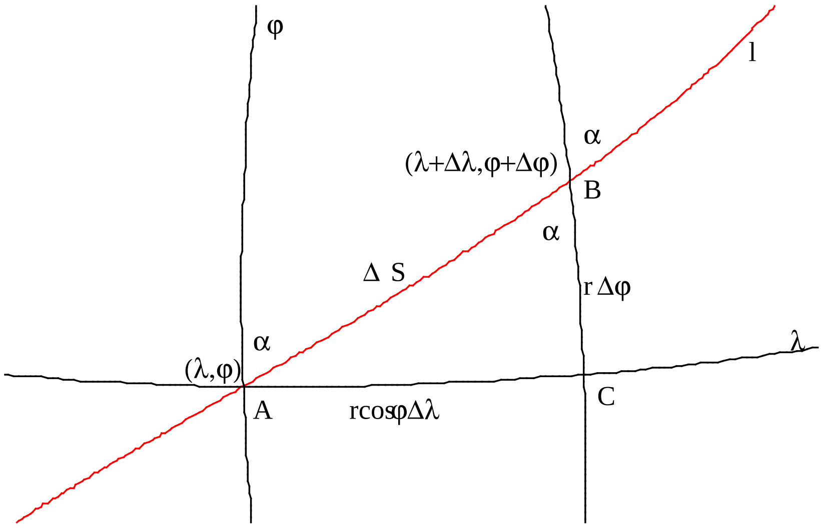


Figure 56

Considérons deux points de la sphère voisins A=(λ,φ) et B=(λ+Δλ,φ+Δφ) situé sur une loxodromie l ayant pour cap α, on note ΔS la longueur de la loxodromie comprise entre A et B (cf figure 56). Soit C=(λ+Δλ,φ) le "triangle" ABC formé par les parties de la parallèle φ, le méridien λ+Δλ et la loxodromie l, n'est pas un triangle sphérique (le parallèle et la loxodromie ne sont pas des arcs de grands cercles), mais il peut être considéré comme plan si A et B sont assez voisins. On a alors dans ABC considéré comme euclidien et rectangle en C:

$$\tan\alpha = \frac{\Delta\lambda\cos\varphi}{\Delta\varphi} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{\Delta\varphi} = \frac{\tan\alpha}{\cos\varphi} \text{ et } \Delta S\cos\alpha = r\Delta\varphi \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta\varphi} = \frac{r}{\cos\alpha}$$

en faisant tendre Δφ vers 0 on obtient les équations différentielles: $\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi} = \frac{\tan\alpha}{\cos\varphi}$ et $\frac{\partial S}{\partial\varphi} = \frac{r}{\cos\alpha}$

Ainsi $\lambda(\varphi) = \tan\alpha\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right)+C$ et $S(\varphi) = \frac{r\varphi}{\cos\alpha}+C'$ car

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{\pi/2+\varphi}{2}}\frac{\cos\frac{\pi/2+\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi/2+\varphi}{2}} = \frac{1}{\sin(\pi/2+\varphi)} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

<u>Remarque</u>: les loxodromies n'étant pas des arcs de grands cercles elles ne sont pas les chemins les plus courts pour aller d'un point à un autre. Par exemple pour rejoindre les pôles Nord et Sud le plus court chemin est de longueur rπ alors que la loxodromie de cap $\alpha = \pi/3$ est de longueur $\frac{r(\pi/2-(-\pi/2))}{\cos(\pi/3)} = 2\pi r$ (cf figure 57) (Pour un cap plus proche de π/2 voir la figure 58 avec $\alpha = 19\pi/40$)

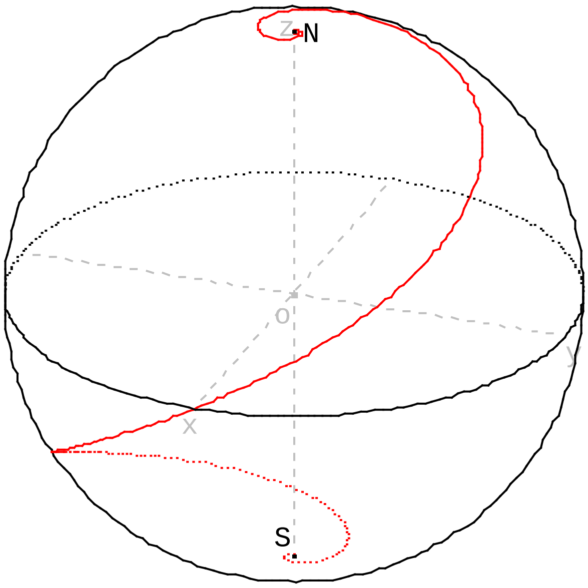


Figure 57

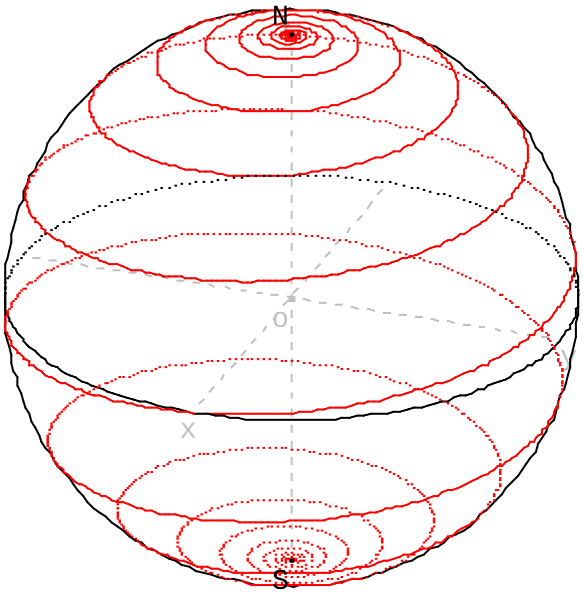


Figure 58

Passons maintenant à la navigation orthodromique: étant donné que l'on se situe dans un triangle sphérique AP_nB (ou AP_sB) les problème de navigation orthodromique reviennent à résoudre ce triangle grâce aux formules que nous venons de démontrer. On appelle:

_distance orthodromique(calculée en milles marins) de A à B, la mesure de l'arc AB

_le cap initial, la mesure de l'angle $\prec P_nAB$

_le cap d'arrivée, la mesure de l'angle $\prec P_nBC$

Quelques remarques préliminaires:

_Les cap sont mesurés dans le sens Nord-Est (ici les angles sont orientés).

_L'angle $\prec AP_nB$ est en fait la différence de longitude entre A et B.

_La distance entre deux méridiens dépend de la latitude où l'on fait le calcul.

_La différence de deux longitude entre deux points de longitude L1 et L2 est la plus petite des quantités $|L1-L2|$ et 360°-$|L1-L2|$. En effet si $|L1-L2|$>180° c'est la deuxième quantité qu'on utilise.
_Un mille marin fait un minute d'arc de grand cercle et 1853.184 m.

Exemple 1: trouver le cap initial et le cap d'arrivée d'une route orthodromique allant de Chicago (lat: 41°50,0' N, long:87°31'42" W) à M situé à l'équateur (long:170°15' E), et trouver la distance entre ces deux points.

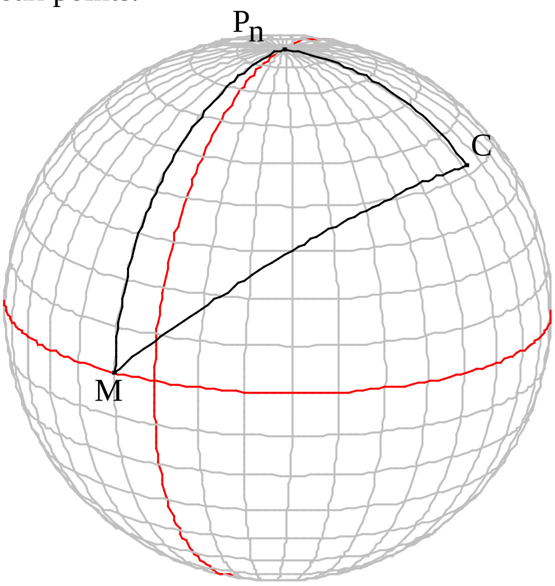


Figure 59

Nous allons résoudre le triangle MP_nC qui à les éléments:

MP_n = a=90°, P_nC=b=90°-41°50'=48°10', $\sphericalangle MP_nC$ =γ=360°-(170°15'+87°31'42")=102°13'18"

On utilise la résolution faite dans le paragraphe II.6.3 et on obtient:

d=arcos(sinbcosγ)=99°04'31" donc la distance est: d=5944.5 milles

$\alpha = \arg\cot\dfrac{-\cos b\cos\gamma}{\sin\gamma}$=81°46'46"' donc le cap initial est: i=360°-81°46'46"=278°13'13"

$\beta = \arg\cot\dfrac{\cot b}{\sin\gamma}$=47°30'47" donc le cap d'arrivée est:r=180°+47°30'47"=227°30'47"

Remarque: pour résoudre ce triangle quadrantal on aurait aussi pu se placer dans son triangle polaire rectangle.

Exemple 2: un navire suit une route orthodromique de Dutch Harbor (lat:53°53' N, long:166°35' W) à Melbourne (lat:37°50' S, long:144°59' E)

1.Trouver la distance, le cap initial et le cap d'arrivée.

2.Trouver le point d'intersection du cercle d'orthodromie et de l'équateur, l'angle que fait la route en ce point et sa distance à Dutch Harbor.

3.Trouver le point de la route ayant pour longitude 180°.

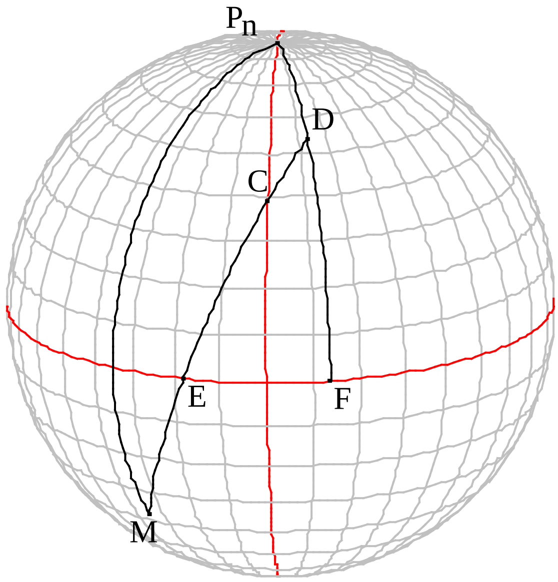


Figure 60

1. On se situe dans le triangle sphérique P_nDM dans lequel on connaît deux côtés et l'angle inscrit:

$$a = P_nM = 90° + 37°50' = 127°50'$$
$$b = P_nD = 90° - 53°53' = 36°07'$$
$$\gamma = \prec DP_nM = 360° - (166°35' + 144°59') = 48°26'$$

Alors, selon la résolution faite au paragraphe II.6.3 on a:

$$\prec P_nDM = \alpha = \arg\cot\left(\frac{\cot a \sin b - \cos b \cos\gamma}{\sin\gamma}\right) = 143°01'26''$$

donc le cap initial est 360°-143°01'26"=216°58'33"

$$\prec P_nMD = \beta = \arg\cot\left(\frac{\cot b \sin a - \cos a \cos\gamma}{\sin\gamma}\right) = 26°40'21''$$

donc le cap d'arrivée est 180°+26°40'21"=206°40'20"

$DM = \arccos(\cos a \cos b - \sin a \sin b \cos\gamma) = 100°45'18'' = 6045.3$ milles.

2. Etant donné que dans le triangle P_nDE (où E est le point équatorial) on connaît deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux, la résolution pose problème. On va donc résoudre le triangle DEF, où F est le point d'intersection du méridien de Dutch Harbor avec l'équateur. Ce triangle est rectangle en F, on utilise les formules du paragraphe II.3.4, le cas où l'on a un angle et le côté adjacent. On a : $\prec FDE$ =α=216°58'33"-180°=36°58'33" et DF=b=53°53'

$$EF = \arg\cot\left(\frac{\cot\alpha}{\sin b}\right) = 31°18'30''$$

alors,

$$DE = \arg\cot(\cot b \cos\alpha) = 59°45'41'' = 3585.7\,milles$$
$$\prec DEF = \arccos(\cos b \sin\alpha) = 69°14'07''$$

donc le point d'intersection avec l'équateur a pour longitude: 166°35'+31°18'29"W=162°06'31"E (on effectue une addition car Dutch Harbor est de longitude Ouest et on fait une route à l'Ouest, on obtient 197°53'29"W ce qui est 162°06'31"E), la distance parcourue est de 3585.7 milles, et le cap d'arrivée est 270°-69°14'07"=200°45'53" (car 270° est le cap plein Ouest).

3. On appelle C le point de longitude 180°, et on travaille dans le triangle P_nDC dont on connaît deux angles et le côté compris entre ces deux angles:
$\prec CP_nD$=α=180°-166°35'=13°25', $\prec P_nDC$ =β=143°01'26" et P_nD=c=90°-53°53'=36°07'.

On cherche seulement b: $$P_nC = \arg\cot\left(\frac{\cot\beta \sin\alpha + \cos\alpha \cos c}{\sin c}\right) = 50°59'01"$$

donc la latitude du point de longitude 180° est 90°-50°59'01"=39°00'59"N.

Exemple 3: Un navire quitte New-York (lat:40°48'36"N, long:73°57'30"W) en suivant une route orthodromique de cap initial 36°. Trouver la latitude et la longitude de sa position B après avoir parcouru 500 milles. Il continue sa route, trouver le point le plus au Nord de sa route.

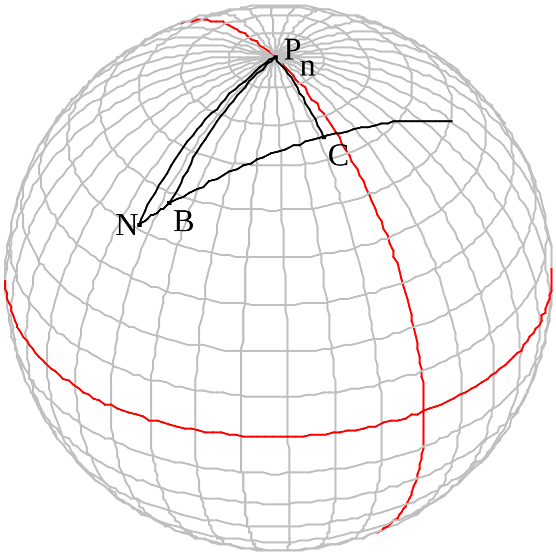


Figure 61

Pour ce faire on résout le triangle sphérique NP_nB ayant pour éléments: $a = NP_n = 90° - 40°11'36", b = NB = 500 milles = 8°20', \gamma = \prec P_nNB = 36°$ grâce à la résolution du paragraphe II.6.3:

$$\prec NP_nB = \beta = \arg\cot\frac{\cot b \sin a - \cos a \cos\gamma}{\sin\gamma} = 7°13'19"$$

$$P_nB = c = \arccos(\cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma) = 42°39'33"$$

Ainsi la longitude du point B est 73°57'30"-7°13'19"=66°44'11"W (on effectue une soustraction car New-York est de longitude Ouest, et on fait une route à l'Est), et sa latitude est 90°-42°39'33"=47°20'27"N.

La plus courte distance entre P_n et la route du navire se calcule le long de l'arc de grand cercle qui coupe perpendiculairement la route et qui passe par P_n. Appelons C le point d'intersection de la route et de sa perpendiculaire passant par P_n. Alors dans le triangle sphérique CP_nN rectangle en C, on connaît l'hypoténuse P_nN=c=90°-40°48'36"=49°11'24", et un angle $\prec P_nNC$ = β=36°. Grâce à la résolution du paragraphe II.3.4 on a :

$$P_nC = b = \arcsin(\sin c \sin\beta) = 26°24'57"$$

$$\prec NP_nC = \alpha = \arg\cot(\tan\beta \cos c) = 64°36'00"$$

Ainsi le point de la route le plus au Nord est de latitude 90°-26°24'57"=63°35'03"N et de longitude 73°57'30"W-64°36°00"=9°21'30"W (on effectue une soustraction car New-York est de longitude Ouest, et on fait une route à l'Est).

IV.4 L'astronomie

Pour un observateur à la surface de la Terre, le ciel apparaît comme une portion d'une gigantesque sphère appelée sphère céleste. Sur cette sphère tous les corps se déplacent d'Est en Ouest par rapport à l'observateur (la cause en est la rotation de la Terre), et la position de chacun peut être fixée par deux coordonnées numériques. Il existe deux systèmes de coordonnées, mais avant de les introduire, il faut expliciter quelques points et grands cercles de référence, sur la sphère céleste. On considère la sphère céleste comme une sphère unité.

Définitions:

_Les **pôles célestes**: ils sont les points d'intersection de l'axe de rotation de la Terre avec la sphère céleste, on les notera P_n et P_s . C'est aussi l'intersection de la droite passant par les pôles terrestres avec la sphère céleste.

_L'**équateur céleste** est le grand cercle ayant pour pôles P_n et P_s, c'est aussi l'intersection du plan équatorial terrestre et de la sphère céleste.

_Les **méridiens célestes** sont tous les arcs de grands cercles reliant P_n et P_s.

_L'**horizon** est le cercle d'intersection du plan tangent à la Terre au point de l'observation avec la sphère céleste; mais comme par rapport aux distances de la plupart des astres, le rayon de la Terre est négligeable on considère que l'horizon passe par le centre de la Terre et est parallèle au plan tangent.

_Le **Zénith** et le **Nadir** sont les pôles du cercle horizon, le zénith se situant au dessus de l'observateur. On les note respectivement Z et N.

Soit T un corps céleste,

_Le **vertical** de T est l'arc de grand cercle ZN passant par T. On note H son intersection avec l'horizon.

_La **hauteur** de T est mesurée le long du vertical, c'est la mesure de l'arc HT (mesurée positivement -resp. négativement- si T est dans l'hémisphère de Z -resp.N-). on la note h.

_La **distance zénithale** et la distance de T à Z, i.e. 90°-h.

_L'**azimut** est l'angle entre le méridien céleste de l'observateur (le méridien passant par le zénith) et le vertical de T. Il est mesuré le long de l'horizon et varie de 0° au point Nord, à 360° dans le sens Nord -Est. On le note a.

_Le **cercle horaire** est l'arc de grand cercle P_nP_s passant par T, on note K son intersection avec l'équateur céleste.

_La **déclinaison** de l'astre est mesurée le long du cercle horaire, c'est la mesure de l'arc KT (mesurée positivement -resp. négativement- si T est dans l'hémisphère de P_n -resp. P_s). On la note δ.

_La **distance polaire** de T est égale à 90°-δ.

_L'**angle horaire** est l'angle entre le méridien céleste de l'observateur et le cercle horaire de T. Il est mesuré le long de l'équateur et varie de 0° à 360° dans le sens Nord-Ouest. On le note θ.

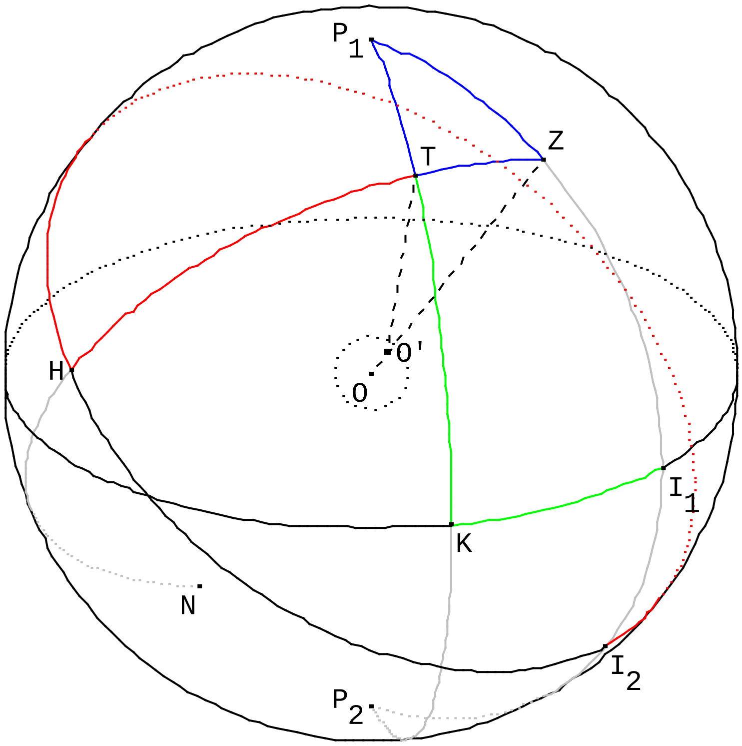
Remarques:

_le Zénith, le Nadir et l'horizon dépendent de l'observateur.

_Du fait de la rotation de la Terre, le cercle horaire semble se déplacer de 15° par heure, on peut donc le mesurer en unité de temps: 0°=0h et 360°=24h.
_Lorsque le soleil se trouve sur le méridien de l'observateur, on dit que c'est le midi local, par abus de langage on dit aussi que le soleil est au zénith.

On peut maintenant définir deux système de coordonnées:
_le système de coordonnées horizontales a pour axes l'horizon et le vertical de l'astre T, les coordonnées de ce dernier sont: sa hauteur et son azimut.
_Le système de coordonnées équatoriales a pour axes l'équateur céleste et le cercle horaire de T, les coordonnées de ce dernier sont sa déclinaison et son angle horaire.

Le triangle astronomique: on nomme ainsi le triangle sphérique ayant pour sommets T, P_n et Z. Ses éléments sont: _le côté TZ=90°-h
_le côté P_nT=90°-δ
_le côté P_nZ=colatitude de l'observateur=90°N-latitude de l'observateur
_l'angle $\prec P_nZT$ = a si T se trouve à l'est du méridien de l'observateur
360°-a sinon
_l'angle $\prec ZP_nT$ = θ si T se trouve à l'ouest du méridien de l'observateur
360°-θ sinon.



Exemple 1: Trouver l'azimut du soleil et l'heure solaire locale à Washington D.C. (lat:38°55'N) à l'instant de l'après-midi où la hauteur du soleil est de 25°40'N et sa déclinaison de -19°15'.

On se situe dans le triangle astronomique P_nZS d'éléments connus:

ZS=90°-25°40'=64°20', P_n S=90°+19°15'=119°15', P_n Z=90°-38°55'=51°05'
D'après la résolution du paragraphe II.6.2, on obtient:

$$\theta' = \arccos \frac{\cos(64°20') - \cos(51°05')\cos(119°15')}{\sin(51°05')\sin(119°15')} = 29°21'17''$$

$$a' = \arccos \frac{\cos(119°15') - \cos(51°05')\cos(64°20')}{\sin(51°05')\sin(64°20')} = 149°06'17''$$

Etant donné que l'on est dans l'après-midi, le soleil est à l'Ouest du Zénith, donc: l'azimut est 360°-a'=210°53'43", l'angle horaire est 29°21'17"=1h57min25s et donc l'heure solaire locale est 12h+1h57min25s=13h57min25s.

Exemple 2: Trouver la longueur du jour le plus court (déclinaison du soleil: -23°27'42") et l'azimut du soleil levant et celui du soleil couchant à Reykjavik (lat:64°09") en Island.

A son lever et à son coucher, la hauteur du soleil est 0°, donc le triangle astronomique P_n ZS est quadrantal: ZS=90°, P_n S=90°+23°27'42"=113°27'42", P_n Z=90°-64°09'=25°51'.
Grâce à la résolution II.6.2 on obtient:

$$\theta' = \arccos(-\frac{\cos(113°27'42'')\cos(25°51')}{\sin(113°27'42'')\sin(25°51')}) = 26°23'14''$$

$$a' = \arccos(\frac{\cos(113°27'42'')}{\sin(25°51')}) = 155°55'24''$$

A son lever le soleil est à l'est de l'observateur et donc l'azimut du soleil est 155°55'24". Au coucher du soleil, l'azimut est 360°-155°55'24"=204°04'36".
Quant à l'angle horaire, il est de 360°-26°23'14"=333°36'46" au lever et de 26°23'14"=1h45min33s au coucher. Ainsi la durée du jour le plus court à Reykjavik est 2*1h45min33s=3h31min06s.

Exemple 3: Trouver la latitude d'un observateur de l'hémisphère Nord quand la hauteur du soleil qu'il mesure est de 54°28', la déclinaison de -15°42' et l'azimut de 200°10'.

Dans le triangle astronomique P_n ZS on connaît les éléments:
P_n S=90°+15°42'=105°42', SZ=90°-54°28'=35+32', et, l'azimut étant supérieur à 180°, le soleil se trouve à l'Ouest du méridien de l'observateur donc a'=360°-200°10'=159°50'.
On utilise la résolution II.6.5 on a : a'<π/2, ZS<π/2 et ZS< P_n S<π-ZS, on a donc une unique solution qui nous donne P_n Z=72°11'46" et comme l'observateur se situe dans l'hémisphère Nord, la latitude de celui-ci est 90°-72°11'46"=17°48'14" N.

Pour le dernier exemple de l'utilisation de la trigonométrie sphérique, il nous faut introduire l'équation du temps. En effet, la vie de l'homme est basée sur le cours du soleil, or la trajectoire annuelle apparente du soleil n'est pas uniforme (car la rotation de la Terre autour de celui-ci ne l'est pas). On a donc introduit ce que l'on appelle le soleil moyen dont la trajectoire apparente est uniforme. Ainsi l'angle horaire du soleil moyen et l'angle horaire du soleil vrai différent (l'angle horaire du soleil moyen varie de façon uniforme), et cette différence est donnée par l'équation du temps:

E.T.= angle horaire du soleil vrai - angle horaire du soleil moyen. Si par exemple l'équation du temps est négative, le soleil moyen se déplace devant le soleil vrai.

Exemple 4: Dans la matinée du 18 Novembre, un navire se trouve à la latitude 54°57' N. La hauteur du soleil observée est h=9°15', sa déclinaison est δ= -19°12'. Il est 8h58min20s G.M.T. et l'équation du temps est E.T.=14min50s. Sur quel méridien se situe le bateau ?

Dans le triangle astronomique P_nZS on connaît les éléments:

P_nS=90°+19°12'=109°12', P_nZ=90°-54°57'=35°03', SZ=90°-9°15'=80°15'.

D'après la résolution II.6.2 on obtient: θ'=37°33'09"=2h30min13s.

Les mesures sont faites dans la matinée donc l'angle horaire est:

θ=360°-37°33'09"=12h-2h30min13s=9h29min47s.

Donc il est 9h29min47s localement au soleil vrai. Connaissant l'équation du temps, l'heure locale (au soleil moyen) est 9h29min47s-14min50s=9h14min57s. Il est 8h58min20s au méridien de Greenwich, on a donc une différence horaire de 16min37s ce qui est égal à 4°09'15". Etant donné qu'il est plus tard sur le bateau qu'à Greenwich, nous nous situons à l'Est du méridien de référence, notre longitude est donc 4°09'15" E.

Les applications qui ont été étudiées ici, ne couvrent pas tous les domaines dans lesquels la trigonométrie sphérique est utilisée. En effet celle-ci peut servir, par exemple, pour résoudre des problèmes posés en architecture ou en mécanique mais aussi en mathématiques pures.

Bibliographie:

Aide-mémoire de mathématiques de l'ingénieur, M.CHOSSAT. Editions Dunod, 1984.

Atlas des mathématiques,REINHARDT, SOEDER. Editeur Librairie générale française, 1997

Cours de mathématiques Tome 1, J.BASS. Editions Masson, 1977.

Cours de mathématiques Tome3 (Géométrie et cinématique), LELONG-FERRAND, ARNAUDIES. Editions Dunod Université, 1990.

Géométrie Tome 2, M.BERGER . Editions Nathan, 1990.

Geometries and groups, V.NIKULIN, I.SHAFRAREUICH. Editions Springer-Verlag, 1994.

Handbook of mathematic, BRONSHTEIN, SEMENDYAYEV. Ed. Springer-Verlag, 1997.

Petite encyclopédie des mathématiques, LIONS. Editeur K.Pagoulatos, 1986.

Standard mathematical tables and formulae, D.ZWILLINGER. CRC Press, 1996.

Traité de trigonométrie rectiligne et sphérique, Joseph-Alfred SERRET. Editions les grands classiques Gauthiers-Villars, 1992.

Trigonométrie, Franck AYRES JR. Série Schaum, 1988.